Ćwiczenia pierwsze i drugie*
Procesy stochastyczne
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. *Udowodnić fakty podane na wykładach.*

Zadanie 2. *Zmienna losowa* (X, Y) *ma gęstość* $g(x, y) = \frac{x^3}{2}\exp\left(-x(y+1)\right)\mathbb{I}_{\{x>0,y>0\}}$. *Wyznaczyć* $E(Y|X)$ *oraz* $E(Y^2|X)$.

Zadanie 3. *Niech* $\Omega = [0,1]$ *i prawdopodobieństwo na* Ω *zadaje miara Lebesgue'a. Znajdź warunkową wartość oczekiwaną* $E(f|\mathcal{F})$, *gdzie* $\mathcal{F} = \sigma\left(\left[0, \frac{1}{2}\right], \mathbb{Q}\cap[0,1]\right)$ *oraz* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ \sqrt{x} & x \notin \mathbb{Q}\cap[0,1] \end{cases}.$$

Zadanie 4. *Niech* $\Omega = [0,1]$, Σ *będzie* σ*-ciałem zbiorów mierzalnych* Ω, *zaś* P *będzie miarą Lebesgue'a na* $[0,1]$. *Wyznaczyć* $E(f|\mathcal{H})$, *gdzie* $f(x) = x$ *i* $\mathcal{H}$ *jest* σ*-ciałem generowanym przez*

1. $\{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{4}, 1]\}$;
2. $\{[0, a], [b, 1]\}$, *gdzie* $a, b \in \mathbb{R}$;

Rozważyć w punkcie (2) różne warianty odpowiedzi.

Zadanie 5. *Niech* τ *będzie momentem stopu względem filtracji* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$. *Czy*

1. $2\tau^2$,
2. $\tau \vee n$,
3. τ^3,
4. $\tau(\frac{\tau}{2} + 1)$

są momentami stopu względem tej filtracji?

Zadanie 6. *Niech* τ *i* σ *będą momentem stopu względem filtracji* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$. *Udowodnić, że zdarzenie* $\{\tau \leqslant \sigma\}$ *należy jednocześnie do* $\mathcal{F}_\tau$ *i do* $\mathcal{F}_\sigma$.

Zadanie 7. *Pokazać, że jeżeli mamy* $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ *ciąg momentów stopu względem filtracji* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$, *to*

1. $\sup\limits_n \tau_n$,
2. $\inf\limits_n \tau_n$,
3. $\limsup\limits_n \tau_n$,
4. $\liminf\limits_n \tau_n$

są momentami stopu.

Zadanie 8. *Niech τ_1 i τ_2 będą momenty stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$. Pokazać, że wtedy mamy $\mathcal{F}_{\tau_1\wedge\tau_2} = \mathcal{F}_{\tau_1} \cap \mathcal{F}_{\tau_2}$.*

Uwaga 1. W kolejnych zadaniach ustalona jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, Σ, P), dana jest filtracja $(\mathcal{F}_n)_{n\in T}$.Ponadto T jest podzbiorem zbioru liczb całkowitych, o ile nie jest powiedziane inaczej.

Zadanie 9. *Niech ciąg $(X_n)_{n\in T}$ będzie $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem. Zbadaj, czy ciąg zmiennych losowych $(Y_n)_{n\in T}$, gdzie $Y_n = \cos(\pi X_n)$, też jest $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem.*

Zadanie 10. *Niech ciąg $(X_n)_{n\in T}$ będzie $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem oraz $E(X_n^2) < +\infty$ dla dowolnego n. Udowodnij, że ciąg $(X_n^2)_{n\in T}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-podmartyngałem.*

Zadanie 11. *Niech $T = \mathbb{N}$. Udowodnij, że $(X_n)_{n\in T}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jedne z warunków*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ E(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n \quad P\text{-}p.n.,$$
$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ E(X_{n+1} - X_n|\mathcal{F}_n) = 0 \quad P\text{-}p.n..$$

Zadanie 12. *Przy założeniach z zadania 11 udowodnij analogiczne warunki dla półmartyngałów.*

Zadanie 13. *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych posiadających skończoną wartość oczekiwaną takich, że $E(X_n) = 0$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Definiujemy $M_n \stackrel{\text{def}}{=} X_1 + \ldots + X_n$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Udowodnij, że $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem.*

Zadanie 14. *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych, ograniczonych zmiennych losowych takich, że $E(X_n) = 1$ dla $n \in \mathbb{N}$. Definiujemy $M_n \stackrel{\text{def}}{=} X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$. Udowodnij, że $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem.*

Zadanie 15. *Niech $(X_n)_{n\in T}$ będzie $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem, zaś $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcją wypukłą. Udowodnij, że jeśli ciąg $(\varphi(X_n))_{n\in T}$ jest całkowalny, to jest $(\mathcal{F}_n)$-podmartyngałem.*

Zadanie 16. *Niech $(X_n)_{n\in T}$ będzie $(\mathcal{F}_n)$-podmartyngałem, zaś $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ niemalejącą funkcją wypukłą. Jeżeli ciąg $(\varphi(X_n))_{n\in T}$ jest całkowalny, to jest on $(\mathcal{F}_n)$-podmartyngałem.*

Zadanie 17. *Udowodnij, że $(X_n)_{n\in T}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-podmartyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $(-X_n)_{n\in T}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-nadmartyngałem.*

Zadanie 18. *Udowodnij, że jeśli $(X_t)_{t\in T}$ i $(Y_n)_{n\in T}$ są dwoma $(\mathcal{F}_n)$-martyngałami (odpowiednio $(\mathcal{F}_n)$-nadmartyngałami, $(\mathcal{F}_n)$-podmartynagłami), zaś a i b dowolnymi liczbami rzeczywistymi (odpowiednio dodatnimi liczbami rzeczywistymi), to $(aX_n + bY_n)_{n\in T}$ też jest $(\mathcal{F}_n)$-martyngałem (odpowiednio $(\mathcal{F}_n)$-nadmartyngałem, $(\mathcal{F}_n)$-podmartynagłem).*

Zadanie 19. *Udowodnij, że jeśli $(X_n)_{n\in T}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-podmartyngałem, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a ciąg $((\max\{X_n, a\})_{n\in T}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-podmartyngałem. W szczególności uzasadnij, że $(X_n^+)_{n\in T}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-podmartyngałem.*

Zadanie 20. *Udowodnij, że jeśli $(X_n)_{n\in T}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-nadmartyngałem, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a ciąg $(\min\{X_n, a\})_{n\in T}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-nadmartyngałem. W szczególności uzasadnij, że $(-X_n^-)_{n\in T}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-nadmartyngałem.*

Zadanie 21. *Udowodnij, że jeżeli $(M_n)_{1\leqslant n\leqslant m}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-nadmartyngałem, a τ i σ są momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{1\leqslant n\leqslant m}$ takimi, że $P(\{\tau \leqslant m\}) = P(\{\sigma \leqslant m\}) = 1$ oraz $P(\{\sigma \leqslant \tau\}) = 1$, to*

$$E(M_1) \geqslant E(M_\sigma) \geqslant E(M_\tau) \geqslant E(M_m).$$

Zadanie 22. *Udowodnij, że jeżeli $(M_n)_{1\leqslant n\leqslant m}$ jest $(\mathcal{F}_n)$-podmartyngałem, a τ i σ są momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_n)_{1\leqslant n\leqslant m}$ takimi, że $P(\{\tau \leqslant m\}) = P(\{\sigma \leqslant m\}) = 1$ oraz $P(\{\sigma \leqslant \tau\}) = 1$, to*

$$E(M_1) \leqslant E(M_\sigma) \leqslant E(M_\tau) \leqslant E(M_m).$$

Zadanie 23. *Niech bedą spełnione założenia definicji transformaty martyngałowej. Udowodnij, że wówczas transformata martyngałowa jest* $(\mathcal{F}_n)$*-martyngałem.*

Zadanie 24. *Niech* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że* $P(\{X_n = \pm 1\}) = P(\{X_n = 0\}) = \frac{1}{3}$*. Dla jakich wartości c ciąg* $(Y_n)_{n\geqslant 1}$*, gdzie* $Y_n = \left(\sum_{i=1}^{n} X_n\right)^2 - nc$*, jest* $(\mathcal{F}_n^X)$*-podmartyngałem,* $(\mathcal{F}_n^X)$*-martyngałem,* $(\mathcal{F}_n^X)$*-nadamrtyngałem?*

Zadanie 25. *Niech* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wartosciach oczekiwanych* $E(X_n) = m_n \neq 0$*. Niech* $Y_n \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{X_i}{m_i}$*. Udowodnij, że ciąg* $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ *jest* $(\mathcal{F}_n^X)$*-martyngałem.*

Zadanie 26. *Niech X będzie całkowalna zmienną losową, a* $(\mathcal{F}_n)_{n\in T}$ *dowolną filtracją. Określamy* $X_n \stackrel{\text{def}}{=} E(X|\mathcal{F}_n)$*. Udowodnić, że* $(X_n)_{n\in T}$ *jest* $(\mathcal{F}_n)$*-martyngałem.*

Zadanie 27. *Załóżmy, że* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie o średniej 0. Niech* $Z_0 = 0$*,* $Z_n = X_0X_1 + X_1X_2 + \ldots + X_{n-1}X_n$ *dla* $n \geqslant 1$*. Udowodnic, że ciag* (Z_n) *jest* $(\mathcal{F}_n)$*-martyngałem.*

Zadanie 28. *Dany jest ciąg* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie* $P(\{\xi_n = \pm 1\} = \frac{1}{2}$*. Niech* $X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ *dla* $n \geqslant 1$*.*

1. *Udowodnić, że* $(X_n)_n$ *oraz* $(X_n^2 - n)_{n\geqslant 1}$ *są* $(\mathcal{F}_n^X)$*-martyngałami.*
2. *Wyznaczyć taką wartość parametru a, by ciąg* $(a^n \cos X_n)_{n\geqslant 1}$ *był* $(\mathcal{F}_n^X)$*-martyngałem.*
3. *Udowodnić, że dla* $\lambda > 0$*, ciąg* $\left(\exp\left(\lambda X_n - \frac{\lambda^2 n}{2}\right)\right)_{n\geqslant 1}$ *jest* $(\mathcal{F}_n^X)$*-nadmartyngałem.*

Zadanie 29. *Niech* $q, p \in]0,1[$*,* $q + p = 1$*. Niech* X_n *oznacza pozycję w chwili n punktu startującego w chwili 0 z punktu 0 na prostej* $\mathbb{R}$ *i* $\forall_{n\in\mathbb{N}}$ *poruszającego się w chwili n z prawdopodobieństwem p w kierunku dodatnim, a z prawdopodobieństwem q w kierunku ujemnym. Udowodnij, że* $(\frac{q}{p})^{X_n}$ *jest* $(\mathcal{F}_n)$*-martyngałem.*