

Ćwiczenia 04
Procesy stochastyczne
kierunek: matematyka, studia II^o
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. Udowodnić fakty podane na wykładach.

Zadanie 2. Niech ciąg zmiennych $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ opisuje ilość orłów wyrzuconych w n pierwszych rzutach moneta z N rzutów. Zbadaj, czy $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest (\mathcal{F}_n^X) -martyngealem.

Zadanie 3. Niech dany będzie ciąg $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niezależnych zmiennych losowych całkowalnych z kwadratem o parametrach $E(X_n) = 0$, $D^2(X_n) = \sigma^2$. Pokazać, że ciąg $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest (\mathcal{F}_n^X) -martyngealem, gdzie $Y_n := \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 - n\sigma^2$.

Zadanie 4. Gramy w następującą grę: rzucamy moneta i jeśli wypadnie orzeł, wygrywamy 1 zł, a jeśli reszka, to przegrywamy 1 zł. Wygrana w n -tej grze to zmienna losowa X_n , a łączna wygrana po n grach to $Y_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Zbadaj, czy ciąg $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest (\mathcal{F}_n^X) -martyngealem.

Zadanie 5. Rozważyć poprzednie zadanie dla wygranej a zł i przegranej b zł.

Zadanie 6. Zadajemy proces Poissona następująco: $X_0 = 0$, $X_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1)$, $X_2 - X_1 \sim \text{Pois}(\lambda_2)$ oraz $X_2 - X_1$ jest niezależne od X_1 . $X_k - X_{k-1} \sim \text{Pois}(\lambda_k)$ oraz $X_k - X_{k-1}$ jest niezależne od wcześniejszych przyrostów. Zbadaj, czy ciąg $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest (\mathcal{F}_n^X) -martyngealem.

Zadanie 7. Niech $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $P(\{\xi_i = \pm 1\}) = 0,5$. Niech $X_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$ oraz $Y_n := (-1)^n \cos(\pi X_n)$. Zbadaj, czy $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest (\mathcal{F}_n^ξ) -martyngealem.

Zadanie 8. Niech $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie (\mathcal{F}_n) -martyngealem. Udowodnij, że wtedy $(X_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ jest (\mathcal{F}_n) -podmartyngealem

Zadanie 9. Niech $(Y_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem całkowalnych zmiennych losowych o tej własności, że

$$E(Y_{n+1} | \mathcal{F}_n^Y) = aY_n + bY_{n-1} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

gdzie $a, b \in]0, 1[$ oraz $a + b = 1$. Rozważmy ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ określony wzorem

$$X_{n+1} := \alpha Y_{n+1} + Y_n \quad \text{dla } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Znaleźć wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ jest (\mathcal{F}_n^Y) -martyngealem.

Zadanie 10. Niech $(X_n)_{n \geq 0}$ będzie (\mathcal{F}_n) -martyngealem. Udowodnić, że zmienne $D_n := X_n - X_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, są parami nieskorelowane.

Zadanie 11 (Proces gałązkowy). Niech $Y_{n,k}$, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie i średniej m . Rozważmy ciąg $(X_n)_{n \geq 0}$ określony wzorem

$$X_0 := 1, \quad X_n := (Y_{n,1} + \dots + Y_{n,X_{n-1}}) \mathbb{1}_{\{X_{n-1} > 0\}} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Pokazać, że ciąg $(\frac{X_n}{m^n})_{n \geq 1}$ jest (\mathcal{F}_n^X) -martyngealem.

1 Jednostajna całkowalność

Zadanie 12. Udowodnij, że jeżeli zmienna losowa ξ jest całkowalna, to

$$\begin{aligned} \forall a \geq 0 \quad |\xi| I_{\{x \in \Omega: |\xi(x)| \geq a\}} &\leq |\xi| \\ \lim_{a \rightarrow +\infty} |\xi| I_{\{x \in \Omega: |\xi(x)| \geq a\}} &= 0 \quad P\text{-p.n.} \\ \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{\{x \in \Omega: |\xi(x)| \geq a\}} |\xi| dP &= 0. \end{aligned}$$

Zadanie 13. Udowodnij, że rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ zmiennych losowych jest jednostajnie całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jednostajnie całkowalna jest rodzina $\{|X_\alpha| : \alpha \in I\}$.

Zadanie 14. Niech rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ zmiennych losowych będzie jednostajnie całkowalna. Udowodnij, że jeżeli funkcję F określimy wzorem

$$\mathbb{R}_+ \ni a \mapsto F(a) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\alpha \in I} \int_{\{x \in \Omega: |X_\alpha(x)| \geq a\}} |X_\alpha| dP,$$

to będzie ona funkcję nierosnącą.

Zadanie 15. Udowodnij, że dla dowolnej rodziny zmiennych losowych $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$, dowolnej liczby dodatniej a oraz dowolnego zdarzenia A zachodzi oszacowanie

$$\sup_{\alpha \in I} \int_A |X_\alpha| dP \leq aP(A) + \sup_{\alpha \in I} \int_{\{x \in \Omega: |X_\alpha(x)| \geq a\}} |X_\alpha| dP.$$

Zadanie 16. Udowodnij, że jeżeli rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ zmiennych losowych jest jednostajnie całkowalna, to dowolna zmienna losowa z tej rodziny jest całkowalna.

Zadanie 17. Udowodnij, że jeżeli rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ zmiennych losowych jest jednostajnie całkowalna, to spełnione są następujące warunki

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha \in I} \int_{\Omega} |X_\alpha| dP &< +\infty, \\ \forall \xi > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall A \in \Sigma \quad P(A) < \delta &\Rightarrow \sup_{\alpha \in I} \int_A |X_\alpha| dP < \xi. \end{aligned}$$

Ponadto jeśli spełnione są warunki (1), (1), to rodzina ta jest jednostajnie całkowalna.

Zadanie 18. Udowodnij, że jeżeli rodziny $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ oraz $\{Y_\beta : \beta \in J\}$ zmiennych losowych, gdzie $I \cap J = \emptyset$, są jednostajnie całkowalne, to rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\} \cup \{Y_\beta : \beta \in J\}$ jest też jednostajnie całkowalna.

Zadanie 19. Niech $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą i nieujemną taką, że $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G(t)}{t} = +\infty$. Udowodnij, że jeśli zmienne losowe z rodziny $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ są całkowalne i $M = \sup_{\alpha \in I} \int_{\Omega} G(|X_\alpha|) dP < +\infty$, to rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Zadanie 20. Udowodnij, że ciąg zmiennych losowych (X_n) jest jednostajnie całkowalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja φ i taka stała C , że $E(\varphi(|X_n|)) < C$ dla każdego n oraz $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \infty$.

Zadanie 21. Niech zmienna losowa ξ będzie całkowalna. Udowodnij, że jeśli rodzina $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ zmiennych losowych spełnia warunek $|X_\alpha| \leq \xi$ dla dowolnego $\alpha \in I$, to ta rodzina jest jednostajnie całkowalna.

Zadanie 22. Niech rodzina zmiennych losowych $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ będzie jednostajnie całkowalna. Udowodnij, że jeżeli $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ jest taką rodziną zmiennych losowych, że $|Y_\alpha| \leq |X_\alpha|$ P -p.n. dla dowolnego indeksu α , to rodzina $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Zadanie 23. Niech rodzina zmiennych losowych $\{X_\alpha : \alpha \in I\}$ będzie jednostajnie całkowalna. Udowodnij, że wówczas dla dowolnej liczby rzeczywistej γ rodzina $\{\gamma X_\alpha : \alpha \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Jeżeli założymy dodatkowo $\{Y_\alpha : \alpha \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna rodziną zmiennych losowych, to udowodnij, że rodzina $\{X_\alpha + Y_\alpha : \alpha \in I\}$ jest jednostajnie całkowalna.

Zadanie 24. Udowodnij, że jeżeli $(X_n)_{n \geq 1}$ ciągiem zmiennych losowych takich, że jest jednostajnie całkowalnym, $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \xi$ P-p.n, to zmienna ξ jest całkowalna oraz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |X_n - \xi| dP = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} X_n dP = \int_{\Omega} \xi dP.$$

Zadanie 25 (lemat). Udowodnij, że jeżeli ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ zmiennych losowych jest zbieżny w $L^p(\Omega, \Sigma, P)$ do zmiennej losowej ξ z $L^p(\Omega, \Sigma, P)$, to ciąg $(|X_n - \xi|^p)_{n \geq 1}$ jest jednostajnie całkowalny.

Zadanie 26. Niech będą spełnione założenia zadania 25. Udowodnij, że wówczas ciąg $(|X_n|^p)_{n \geq 1}$ jest jednostajnie całkowalny.

Zadanie 27 (lemat). Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych klasy $L^p(\Omega, \Sigma, P)$, zaś ξ będzie zmienną losową takimi, że

$$X_n \xrightarrow{P} \xi \\ \forall \xi > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \Sigma P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n \geq 1} \int_A |X_n - \xi|^p dP < \xi.$$

Udowodnij, że wtedy $\xi \in L^p(\Omega, \Sigma, P)$ oraz $X_n \xrightarrow{L^p} \xi$.

Zadanie 28. Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych z $L^p(\Omega, \Sigma, P)$. Korzystając z wcześniejszych zadań udowodnij, że ciąg ten jest zbieżny w $L^p(\Omega, \Sigma, P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zmienna losowa ξ taka, że

$$X_n \xrightarrow{P} \xi \\ \forall \xi > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \Sigma P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n \geq 1} \int_A |X_n - \xi|^p dP < \xi.$$

Zadanie 29 (lemat). Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych z $L^p(\Omega, \Sigma, P)$, zaś ξ będzie zmienną losową takimi, że

$$X_n \xrightarrow{P} \xi \\ \forall \xi > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \Sigma P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n \geq 1} \int_A |X_n|^p dP < \xi.$$

Udowodnij, że $\xi \in L^p(\Omega, \Sigma, P)$ oraz

$$\forall \xi > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \Sigma P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n \geq 1} \int_A |X_n - \xi|^p dP < \xi.$$

Zadanie 30. Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych z $L^p(\Omega, \Sigma, P)$. Korzystając z wcześniejszych zadań udowodnij, że ciąg ten jest zbieżny w $L^p(\Omega, \Sigma, P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg ten jest zbieżny według miary oraz

$$\forall \xi > 0 \exists \delta > 0 \forall A \in \Sigma P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{n \geq 1} \int_A |X_n|^p dP < \xi.$$

Zadanie 31. Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem zmiennych losowych z $L^p(\Omega, \Sigma, P)$. Korzystając z wcześniejszego zadania udowodnij, że ciąg ten jest zbieżny w $L^p(\Omega, \Sigma, P)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

1. Ciąg ten jest zbieżny według miary.
2. Ciąg $(|X_n|^p)_{n \geq 1}$ jest jednostajnie całkowalny.

2 Zbieżność

Zadanie 32. Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie (\mathcal{F}_n) -martyngałem. Czy $(X_n)_{n \geq 1}$ jest domykalny, jeśli

- ciąg $(E(X_n \ln X_n))$ jest jednostajnie całkowalny, zbieżny?
- (X_n) jest zbieżny prawie na pewno?
- (X_n) jest zbieżny w $L^1(\Omega, \Sigma, P)$?

Zadanie 33. Podaj przykład martyngału $(X_n)_{n \geq 1}$ takiego, że $X_n \rightarrow 0$ P -p.n. oraz $E(|X_n|) \rightarrow +\infty$.

Zadanie 34. Niech $(\xi_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych losowych o wartościach ± 1 . Wykaż, że (ξ_n) -nadmartyngał

$$Z_n := e^{a(\xi_1 + \dots + \xi_n) - (na^2/2)}$$

jest zbieżny prawie na pewno. Czy jest zbieżny w $L^1(\Omega, \Sigma, P)$?

Zadanie 35. Niech X_1, X_2, \dots będą niezależne o rozkładzie jednostajnym na $[0, 2]$. Wykaż, że

$$M_n := \prod_{k=1}^n X_k$$

tworzą (\mathcal{F}_n^X) -martyngał zbieżny do 0 prawie na pewno, ale nie w $L^1(\Omega, \Sigma, P)$.