Ćwiczenia 06
Procesy stochastyczne
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

Wartość oczekiwana i wariancja procesu stochastycznego

Definicja 1. *Wartością oczekiwaną (funkcją wartości oczekiwanej) procesu stochastycznego* $(X_t)_{t\in T}$ *rzędu pierwszego nazywamy funkcję* m_X *taką, że*

$$T \ni t \mapsto m_X(t) \stackrel{\text{def}}{=} E(X_t).$$

Definicja 2. *Wariancją (funkcją wariancji) procesu Hilberta* $(X_t)_{t\in T}$ *nazywamy funkcję* σ_X^2 *taką, że*

$$T \ni t \mapsto \sigma_X^2(X_t) \stackrel{\text{def}}{=} D^2(X_t).$$

Kowariancja i korelacja procesu stochastycznego

Definicja 3. *Kowariancją (funkcją kowariancji) procesu stochastycznego Hilberta* $(X_t)_{t\in T}$ *nazywamy odwzorowanie* $K_X\colon T\times T\to\mathbb{R}$ *takie, że*

$$\forall_{s,t\in T} K_X(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{cov}(X_t,X_s) \equiv E((X_t-E(X_t))(X_s-E(X_s))). \tag{1}$$

Kowariancją unormowaną (funkcją kowariancji unormowanej) procesu Hilberta $(X_t)_{t\in T}$ *nazywamy odwzorowanie* $\overline{K}_X\colon T\times T\to\mathbb{R}$ *takie, że*

$$\forall_{s,t\in T} \overline{K}_X(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(X_t,X_s). \tag{2}$$

Korelacją (funkcją korelacji) procesu Hilberta $(X_t)_{t\in T}$ *nazywamy odwzorowanie* $\widetilde{K}_X\colon T\times T\to\mathbb{R}$ *takie, że*

$$\forall_{s,t\in T} \widetilde{K}_X(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} E(X_tX_s). \tag{3}$$

Uwaga 1. *Kowariancja, kowariancja unormowana oraz korelacja nazywane są też odpowiednio autokwoariancją, autokowariancją unormowaną i autokorelacją.*

Zadanie 1. *Udowodnić fakty podane na wykładach.*

Zadanie 2. *Dany jest proces* $(U_t)_{t\geqslant 0}$*, gdzie* $U_t = At^2-2Bt$ *i* (A,B) *jest wektorem losowym o rozkładzie:* $P(\{A=\pm1; B=\pm1\}) = 0{,}25$*. Narysować dwie przykładowe trajektorie i obliczyć charakterystyki liczbowe procesu.*

Zadanie 3. *Dany jest proces* $(U_t)_{t\geqslant 0}$*, gdzie* $U_t = t^2 - Yt$*. Dla ustalonego* t *znaleźć rozkład* U_t*, jeśli* Y *ma rozkład jednostajny na odcinku* $[0,1]$*. Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu.*

Zadanie 4. *Niech* $Y\sim U[0,1]$*. Dany jest proces* $(U_t)_{t\geqslant 0}$*, gdzie* $U_t = Y\cos(at)$*,* $a\in\mathbb{R}$*. Obliczyć* $E[U_t]$ *oraz charakterystyki liczbowe tego procesu.*

Zadanie 5. *Dany jest proces stochastyczny* $(X_t)_{t>0}$*, gdzie* $X_t = tU+V$ *i* U *i* Y *są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z jednakowym parametrem* λ*. Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu* $(X_t)_{t>0}$*.*

Zadanie 6. *Dla procesu z poprzedniego zadania wyznaczyć rozkłady jednowymiarowe.*

Zadanie 7. *Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \sigma)$, stała $b \in \mathbb{R}$. Podać gęstości jednowymiarowe i policzyć funkcje kowariancji dla procesu $(U_t)_{t>0}$, gdzie $U_t = X_t + b$.*

Zadanie 8. *Dany jest proces $(Z_t)_{t\geqslant 0}$, gdzie $Z_t = t^2 + Xt + Y$. Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ jeśli X i Y są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi.*

Procesem Poissona z intensywnoscia $\lambda > 0$ nazywamy proces $(N_t)_{t\geqslant 0}$ spełniający następujące warunki:

1. $N_0 = 0$ *p.n.*,
2. $(N_t)_{t\geqslant 0}$ ma przyrosty niezależne,
3. dla każdej pary (s, t), gdzie $t > s$ zmienna losowa $N_t - N_s$, ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda(t - s)$.

Zadanie 9. *Wyznaczyć charakterystyki liczbowe procesu Poissona z intensywnościa $\lambda > 0$.*

Zadanie 10. *Dany jest proces $(U_t)_{t\geqslant 0}$, gdzie $U_t = t^3 - Yt$, gdzie $Y \sim U[1, 2]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe tego procesu.*

Zadanie 11. *Dany jest proces $(U_t)_{t\geqslant 0}$, gdzie $U_t = t^2 - Yt$, gdzie $Y \sim U[2, 3]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe tego procesu.*

Zadanie 12. *Dany jest proces $(U_t)_{t\geqslant 0}$, gdzie $U_t = \cos(t) - 3tY$, gdzie $Y \sim U[3, 4]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe tego procesu.*

Zadanie 13. *Dany jest proces $(U_t)_{t\geqslant 0}$, gdzie $U_t = \sin(t) - t^2Y$, gdzie $Y \sim U[2, 3]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe tego procesu.*

Zadanie 14. *Obliczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = A\sin(\omega t)$, ω - stała, A - zmienna losowa o rozkładzie $\mathcal{N}(230, 5)$.*

Zadanie 15. *Obliczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At^2$, gdzie A jest zmienną losową skokowa o funkcji prawdopodobieństwa $P(\{A = \pm 1\}) = 0{,}5$.*

Zadanie 16. *Obliczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At + B$, gdzie A i B są zmiennymi losowymi o parametrach $E(A) = 0$, $E(B) = 1$, i $D^2(A) = 1$, $D^2(B) = 2$, $\operatorname{cov}(A, B) = -1$.*

Zadanie 17. *Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At^2 + Be^t$, gdzie A, B to nieskorelowane zmienne losowe o parametrach: $E(A) = 2$, $E(B) = -3$, $D^2(A) = 1$, $D^2(B) = 3$.*

Zadanie 18. *Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At + B$, gdzie A i B to zmienne losowe o parametrach: $E(A) = 0$, $E(B) = 0$ i macierzy kowariancji $K = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1{,}5 \end{bmatrix}$.*

Zadanie 19. *Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At + 1$, gdzie $A \sim U(0, 1)$. Jak wyglądają realizacje tego procesu? Które z poniższych funkcji $x_1(t) = 0{,}3t + 1$, $x_2(t) = -0{,}3t + 1$, $x_3(t) = 2t + 1$ są realizacjami tego procesu?*

Zadanie 20. *Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At - 3$, gdzie $A \sim \mathcal{N}(3, 1)$. Jak wyglądają realizacje tego procesu?*

Zadanie 21. *Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = \cos(t + B)$, gdzie $B \sim U(-\pi, \pi)$.*

Zadanie 22. *Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = A\sin(t + B)$, gdzie zmienne A i B są niezależne oraz $A \sim U(-0,5; 0,5)$ i $B \sim U(-\pi, \pi)$.*

Zadanie 23. *Proces $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ma tylko 3 realizacje: $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t + 1$, $x_3(t) = t + 2$. Realizacje te są przyjmowane odpowiednio z prawdopodobieństwami: 1/2, 1/3; 1/6. Wyznaczyć parametry tego procesu.*

Zadanie 24. *Proces $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ma tylko 4 realizacje: $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t+1$, $x_3(t) = t+2$, $x_4(t) = t-1$. Realizacja ostatnia jest przyjmowana z prawdopodobieństwem 0,1, a pozostałe realizacje są przyjmowane z takim samym prawdopodobieństwem. Wyznaczyć parametry tego procesu.*

Zadanie 25. *Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = Ae^t + Be^{-t}$, a A i B to zmienne losowe o parametrach: $E(A) = 0$, $E(B) = 0$, i $D^2(A) = 1$, $D^2(B) = 2$, $\operatorname{cov}(A, B) = -1$.*

Zadanie 26. *Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = A + Bt$, a A i B to zmienne losowe o parametrach: $E(A) = -1$, $E(B) = 1$, i $D^2(A) = 1$, $D^2(B) = 4$, $\rho(A, B) = -0{,}5$.*

Zadanie 27. *Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At^2 + B$, a A i B to zmienne losowe nieskorelowane. A ma rozkład wykładniczy z parametrem 1,5, a B jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa: $P(\{B = \pm 1\}) = 0{,}5$;*

Zadanie 28. *Dany jest proces $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $Y_t = f(t)X_t + g(t)$, a f i g są funkcjami rzeczywistymi (nielosowymi). Wyrazić parametry procesu $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ za pomocą parametrów procesu $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$.*

Zadanie 29. *Rozważmy proces $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, gdzie $X_t = U$, a U to zmienna losowa. Obliczyć:*

1. *wartość ocekiwaną, wariancję i kowariancję procesu, jeżeli znane są $E(U) = m$ i $D^2(U) = \sigma^2$,*
2. *jednowymiarową gęstość i dwuwymiarową dystrybuantę procesu, jeżeli dana jest gęstość φ zmiennej losowej U.*

Zadanie 30. *Rozważmy proces $(X_t)_{t>0}$, gdzie $X_t = Ut + V$. Wyznaczyć:*

1. *wartość oczekiwaną i kowariancję tego procesu, jeżeli U jest zmienną losową dyskretną o rozkładzie $P(\{U = k\}) = p_k$, $k \in \overline{1,n}$, $p_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$, $V = 0$;*
2. *wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję tego procesu oraz jednowymiarową gęstość procesu, jeżeli $U \sim \mathcal{N}(m;\sigma)$ oraz $V = v$ jest wielkością nielosową;*
3. *wartość oczekiwaną, kowariancję, korelację i wariancję, jeżeli U i V są zmiennymi losowymi niezależnymi o znanych parametrach. Jaką postać ma gęstość prawdopodobieństwa procesu, jeśli znane są gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych U i V: f_U i f_V;*
4. *wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję tego procesu, jeżeli U i V są zmiennymi losowymi, o których wiadomo, że rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (U, V) jest rozkładem normalnym $\mathcal{N}(m_U, m_V; \sigma_U, \sigma_V, \rho)$.*

Zadanie 31. *Rozważmy proces stochastyczny $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, a $X_t = \varphi(t, U)$, gdzie φ - funkcja rzeczywista nielosowa klasy $C(\mathbb{R})$, t - czas, U - zmienna losowa o znanym rozkładzie. Obliczyć wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję tego procesu, gdy:*

1. *$\varphi(t, U) = \alpha(t)U + \beta(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ są funkcjami nielosowymi i znana jest gęstość zmiennej losowej U;*
2. *$\varphi(t, U) = \sum\limits_{i=1}^{N} \varphi_i(t)U_i$; φ_i - są funkcjami nielosowymi, dla $i \in \overline{1,N}$, U_i - elementy N-wymiarowej zmiennej losowej $U = (U_1, \ldots, U_N)$ o znanych $E(U_i) = m_i$, i macierzy kowariancyjnej $[b_{ik}]$, gdzie $b_{ik} = \operatorname{cov}(U_i; U_k)$ dla $i, k \in \overline{1,N}$.*

Zadanie 32. *Rozważmy proces stochastyczny $(X_t)_{t\in T}$ opisujący drgania sinusoidalne, który zapisuje się w postaci:*

$$X_t = U_1 \cos(\Psi t) + U_2 \sin(\Psi t),$$

gdzie $U; \Phi, \Psi$ - zmienne losowe oraz $U_1 = U \sin(\Phi)$, $U_2 = U \cos(\Phi)$.

1. *podać jedno- i dwuwymiarową dystrybuantę procesu, jeśli: $T = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, a $U \sim U([0, 1])$, $\Psi \equiv 1$, $\Phi 0$;*
2. *podać wartość oczekiwaną procesu, jeśli (U, Ψ) jest zmienną losową dwuwymiarową o rozkładzie jednostajnym na obszarze $[0, 1] \times [0, 1]$, a $\Phi \equiv 0$ jest wielkością nielosową;*
3. *zbadać, czy proces jest stacjonarny, jeżeli $E(U) = 0$, $D^2(U) = \sigma_U^2$, $\Phi \sim U(0; 2\pi)$, $\Psi = a > 0$ jest wielkością nielosową, U i Φ są zmiennymi losowymi niezależnymi.*