

Ćwiczenia 10  
Całka stochastyczna  
kierunek: matematyka, studia II<sup>o</sup>

dr Jarosław Kotowicz

**Zadanie 1.** Udowodnić fakty podane na wykładach.

**Zadanie 2.** Obliczyć z definicji całki Itô:

1.  $\int_0^T dW_t = W_T,$

2.  $\int_a^b dW_t = W_b - W_a,$

3.  $\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{T}{2},$

4.  $\int_0^T t dW_t = TW_T - \int_0^T W_t dt,$

5.  $\int_0^T W_t^2 dW_t = \frac{1}{3}W_T^3 - \int_0^T W_t dt.$

**Zadanie 3.** Udowodnij, że  $E\left(\int_0^T W_t dt\right) = 0.$

**Zadanie 4.** Korzystając z twierdzenia:  $E\left(\int_0^T f(t, W_t) dt\right) = \int_0^T E(f(t, W_t)) dt$  oblicz wartości oczekiwane całek

1.  $E\left(\int_0^T W_t dW_t\right),$

2.  $E\left(\int_0^T t dW_t\right),$

3.  $E\left(\int_0^T W_t^2 dW_t\right),$

4.  $E\left(\int_0^T W_t^4 dW_t\right).$

**Zadanie 5.** Korzystając z formuły Itô dla procesu Wienera

$$dF(t, W_t) = \left(F'_t + \frac{1}{2}F''_{xx}\right) dt + F'_x dW_t$$

oblicz następujące różniczki:

1.  $d(W_t^2)$ ,
2.  $d(tW_t)$ ,
3.  $d(tW_t^2)$ ,
4.  $d(W_t^3)$ ,
5.  $d(W_t^k)$ .

**Zadanie 6.** Korzystając z formuły Itô dla procesu Wienera wyprowadź wzór na całkowanie przez części

$$\int_0^T F'_x(t, W_t) dW_t = F(T, W_T) - F(0, W_0) - \int_0^T \left( F'_t + \frac{1}{2} F''_{xx} \right) dt.$$

**Zadanie 7.** Oblicz wartości oczekiwane całek:

1.  $E \left( \int_0^T t^2 dW_t \right)$ ,
2.  $E \left( \int_0^T f(t) dW_t \right)$ .

**Zadanie 8.** Znajdź rozkład zmiennej  $5W_1 - W_3 + W_7$ .

**Zadanie 9.** Dla jakich parametrów  $a$  i  $b$ , zmienne  $aW_1 - W_2$  oraz  $W_3 + bW_5$  są niezależne?