

Ćwiczenia pierwsze*

Badania operacyjne (budowanie modelu matematycznego)

kierunek: matematyka, studia I°

specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1 ([?, Przykład 1 §1.1]). *Przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby: W_1 i W_2 . W procesie produkcji tych wyrobów zużywa się wiele środków, spośród których dwa są limitowane. Limity te wynoszą: środek I - 96 000 jednostek, natomiast środek II - 80 000 jednostek. Nakłady limitowanych środków na jednostkę wyrobów W_1 i W_2 podano w poniższej tabeli. Wiadomo także, że zdolności produkcyjne jednego*

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady	
	W_1	W_2
I	16	24
II	16	10

z wydziałów, nie pozwalają produkować więcej niż 3000 szt. wyrobów W_1 oraz 4000 szt. wyrobów W_2 . Ponadto, działająca w ramach przedsiębiorstwa komórka analizy rynku ustaliła optymalne proporcje produkcji, które kształtują się odpowiednio jak 3:2. Cena sprzedaży (w PLN) jednostki wyrobu W_1 wynosi 30, a wyrobu W_2 - 40. Ustalić rozmiary produkcji przy założeniu, że uzyskany przychód ze sprzedaży będzie maksymalny.

Zadanie 2 ([?, Przykład 2 §1.1]). *Przedsiębiorstwo produkuje dwa wyroby: W_1 i W_2 . W procesie produkcji tych wyrobów zużywa się wiele środków, spośród których dwa są limitowane. Limity te wynoszą: środek I - 36 000 jednostek, a środek II - 50 000 jednostek. Nakłady limitowanych środków na jednostkę wyrobów W_1 i W_2 podano w poniższej tabeli. Należy uwzględnić, że zdolność produkcyjna jednego z agregatów nie*

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady	
	W_1	W_2
I	6	6
II	10	5

pozwała wyprodukować więcej niż 4000 sztuk wyrobu W_2 . Nie ma natomiast żadnych dodatkowych ustaleń w stosunku do wyrobu W_1 .

Określ optymalne rozmiary produkcji, przy założeniu, że zysk zrealizowany na obu wyrobach jest jednakowy.

Zadanie 3 ([?, Przykład 3 §1.1]). *Przedsiębiorstwo produkuje cztery wyroby: W_1 , W_2 , W_3 i W_4 . Dwa spośród wielu środków używanych w procesie produkcji są limitowane. Limity te wynoszą: środek I - 90 000 jednostek, natomiast środek II - 120 000 jednostek. Nakłady limitowanych środków na jednostkę produkcji pokazano w poniższej tabeli.*

Zysk osiągany na jednostce produkcji kształtuje się odpowiednio: 4,6,3,12 PLN.

Ustal optymalne rozmiary produkcji poszczególnych wyrobów oraz podaj łączny zysk zrealizowany przy optymalnym asortymencie produkcji.

*©J.Kotowicz

Środki produkcji	Jednostkowe nakłady na produkcję wyrobu			
	W_1	W_2	W_3	W_4
I	1	2	1,5	6
II	2	2	1,5	4

Zadanie 4 ([?, Przykład 4 §1.2]). Spółdzielnia produkcyjna sporządza mieszankę paszową dla trzody chlewnej z dwóch produktów: P_1 i P_2 . Mieszanka paszowa ma dostarczyć trzodzie chlewnej pewnych składników odżywczych: S_1 , S_2 i S_3 w ilościach nie mniejszych niż określone minima. Zawartość składników odżywczych w jednostce poszczególnych produktów podano w poniższej tabeli.

Składniki	Produkty		Minimalna ilość składnika
	P_1	P_2	
S_1	3	9	27
S_2	8	4	32
S_3	12	3	36
Cena (PLN)	6	9	

Należy zakupić takie ilości produktów P_1 i P_2 , aby dostarczyć trzodzie chlewnej składników odżywczych: S_1 , S_2 i S_3 w ilościach nie mniejszych niż podane minima oraz tak aby koszt był minimalny.

Zbuduj model matematyczny tego zagadnienia.

Zadanie 5 ([?, Przykład 5 §1.2]). Gospodarstwo rolne prowadzi hodowlę bydła rogatego. Zwierzętom należy dostarczyć w pożywieniu m.in składnika odżywczego A , w ilości co najmniej 60 jednostek, zawartego w produktach P_1 i P_2 służących jako pasza. Produkty te zawierają również pewne ilości składników B i C , jednak ze względu na szkodliwe działanie tych składników, zwierzęta powinny je otrzymywać w ograniczonych ilościach - składnik B co najwyżej 40 jednostek, a składnika C co najwyżej 36 jednostek. Ponadto produkt P_1 należy dostarczyć w ilości co najmniej 10 jednostek. Zawartość interesujących nas składników w poszczególnych produktach podano w tabeli.

Składniki	Zawartość składnika w jednostce produktu	
	P_1	P_2
A	3	3
B	10	4
C	6	9

Wiedząc, że cena produktu P_1 wynosi 400 PLN za jednostkę, a cena produktu P_2 - 800 PLN za jednostkę, określić wielkość zakupu produktów P_1 i P_2 , aby zrealizować wymagania co do składu paszy i aby koszt zakupu produktów był minimalny.

Zbuduj model matematyczny tego zagadnienia.

Zadanie 6. Firma produkuje wyroby I i II rodzaju. Do wyprodukowania sztuki wyrobu I rodzaju potrzebne są 2 godziny pracy, zaś jednej sztuki wyrobu II rodzaju - 1 godzina. Z uwagi na ograniczenia zatrudnienia, miesięczny limit zasobu godzin pracy wynosi 3000. Zużycie podstawowego surowca na jednostkę produktu I rodzaju wynosi 10 kg, a na jednostkę produktu II rodzaju - 5 kg. Ze względu na uwarunkowania zewnętrzne, miesięczne zużycie podstawowego surowca musi przekraczać 9000 kg. Zysk wynikający ze sprzedaży jednej sztuki produktu I rodzaju wynosi 3 Euro, zaś jedna sztuka wyrobu II rodzaju przynosi zysk na poziomie 2 Euro. Z uwagi na uwarunkowania ekonomiczne, miesięczny poziom produkcji wyrobu II rodzaju nie powinien przekroczyć 2000 sztuk. Wyznaczyć program produkcji wyrobów maksymalizujący, miesięczny zysk przedsiębiorstwa, zakładając brak problemów ze zbytem produktów.

Zadanie 7. Zakład produkuje dwa typy wózków: S i H . Zysk ze sprzedaży jednego wózka typu S wynosi 2 850 PLN a wózka typu H 6 270 PLN. Koszt produkcji jednego wózka typu S wynosi 19 000 PLN, a wózka typu H 33 000 PLN. Roczny kapitał firmy zaangażowany w produkcję nie może przekroczyć 2 400 000 PLN. Na montaż wózka typu S potrzeba 6 roboczodni, na montaż wózka typu H potrzeba 4 roboczodni. Ze względu na ograniczoną liczbę pracowników, którzy mogą brać udział w produkcji wózków łączny nakład pracy nie

może przekroczyć 520 roboczodni. Roczna produkcja wózków typu S nie może być większa jak 100 sztuki nie mniejsza jak 10; roczna produkcja wózków typu H nie może być większa jak 75 sztuki i nie mniejsza jak 5. Określ roczną wielkość produkcji wózków typu S i H maksymalizującą zysk z ich sprzedaży. 6.

Zadanie 8. Przedsiębiorstwo „Kop z nami” wykonuje wykop pod budynek. Na stanie przedsiębiorstwa są samochody 8 i 10 tonowe. Koparka wykonująca wykop może załadować maksymalnie 25 jednostek w ciągu zmiany bez względu na pojemność samochodu. Na jeden kurs samochód 8 tonowy zużywa 6 litrów paliwa, 10 tonowy – 8 litrów. Żaden z samochodów nie jest w stanie wykonać więcej niż 20 kursów w ciągu zmiany. Dzienny limit paliwa wynosi 196 litrów. Ile cykli przewozowych należy zaplanować dla każdego z dwóch typów samochodów, aby objętość wywiezionego gruntu była największa? Czy zlikwidowanie limitu zużywanego paliwa zmieni rozwiązanie?

Zadanie 9. Zakład dysponuje jednym urządzeniem do produkcji mieszanek betonowych A i B. Mieszanki rozwożone są tym samym typem wywrotki. Urządzenie produkujące mieszanki w ciągu jednej godziny jest w stanie wyprodukować 14 wywrotek mieszanki A lub 7 wywrotek mieszanki B. Ze względu na różne odległości do odbiorców samochody są w stanie przewieźć mieszankę A siedem razy na godzinę lub 12 razy na godzinę mieszankę B. Urządzenie do załadunku jest w stanie obsłużyć nie więcej niż 8 samochodów na godzinę bez względu na rodzaj mieszanki. Zysk ze sprzedaży mieszanki A wynosi 50 PLN za wywrotkę a 100 PLN za mieszankę B. Ile wywrotek mieszanki A i B powinien produkować zakład, aby zmaksymalizować dochód ze sprzedaży betonów? Do ilu należałoby zwiększyć moc urządzenia załadunkowego, aby nie stanowiło ograniczenia wzrostu sprzedaży produkowanych mieszanek betonowych?

Zadanie 10. Zapisać następujące zadanie w postaci zadania programowania liniowego.

Producent odzieży powinien określić, ile kurtek i płaszczy należy wyprodukować tak, aby zysk osiągnięty z ich sprzedaży był maksymalny. Do produkcji wykorzystywany jest jeden rodzaj tkaniny. Producent posiada 150 m² tej tkaniny. Zgodnie z zamówieniami należy wyprodukować co najmniej 20 kurtek i co najwyżej 10 płaszczy. Do produkcji jednej kurtki i jednego płaszcza potrzeba odpowiednio 2,5 m² i 4 m² tkaniny. Przy sprzedaży jednej kurtki producent osiąga zysk 60 PLN, płaszcza 50 PLN.

Zadanie 11. Zapisać następujące zadanie w postaci zadania programowania liniowego.

Wytwórca mebli powinien określić, ile stołów, krzeseł, biurek i szaf powinien wyprodukować tak, aby zysk osiągnięty z ich sprzedaży był maksymalny. Do produkcji wykorzystywane są dwa typy desek. Wytwórca posiada 1500 m desek I typu i 1000 m desek II typu oraz dysponuje kapitałem 860 godzin roboczych na wykonanie zaplanowanej produkcji. Ze złożonych zamówień wynika, że należy wyprodukować co najmniej 40 stołów, 130 krzeseł, 30 biurek i nie więcej niż 10 szaf. Do produkcji każdego stołu, krzesła, biurka i szafy potrzeba odpowiednio 5, 1, 9, 12 m desek I typu i 2, 3, 4, 1 m desek II typu. Na wykonanie stołu potrzeba 3 godzin pracy, krzesła - 2 godzin, biurka - 5 godzin, szafy - 10 godzin. Ze sprzedaży jednego stołu, krzesła, biurka i szafy wytwórca osiąga zysk odpowiednio 50, 20, 60 i 40 PLN.

Zadanie 12. Zapisać następujące zadanie w postaci zadania programowania liniowego.

Pewien wytwórca posiada centrale zbytu w Lublinie, Łodzi i Szczecinie. Centrale te posiadają odpowiednio 40, 20 i 40 jednostek produktu. Punkty sprzedaży zamówiły następujące ilości produktu: Białystok - 25, Cieszyn - 10, Kraków - 20, Sopot - 30, Warszawa - 15. Kosztu transportu jednostki (w PLN) z każdej centrali zbytu do dowolnego punktu sprzedaży podaje następująca tabela:

	Białystok	Cieszyn	Kraków	Sopot	Warszawa
Lublin	55	30	40	50	40
Łódź	35	30	100	45	60
Szczecin	40	60	95	35	30

Należy tak zaplanować dystrybucję produktu, by kosztu transportu był minimalny.

Zadanie 13. Zadaniem dietetyka jest opracowanie składu porannej owsianki tak, aby zawierała ona niezbędne dzienne zapotrzebowanie organizmu na określone składniki odżywcze i jednocześnie była możliwie najtańsza. Dietetyk ma do dyspozycji płatki Corn Flakes i Nesquik. Śniadanie powinno zawierać co najmniej 1 mg witaminy B1, 12 mg żelaza i mieć wartość energetyczną równą 360 kcal. 100 g płatków Corn Flakes zawiera 1,2 mg witaminy B1, 12 mg żelaza i ma wartość energetyczną równą 368 kcal, natomiast 100 g płatków Nesquik zawiera 1,5 mg witaminy B1, 10 mg żelaza i ma wartość energetyczną równą 390 kcal. Ponadto 100 g płatków Corn Flakes kosztuje 32 gr, a 100 g płatków Nesquik - 36 gr.

Zadanie 14. Zakład produkuje dwa wyroby A i B, które w procesie zużywają dwa podstawowe surowce P i Q. Przychód ze sprzedaży wyrobów A i B wynosi odpowiednio 5 i 8 PLN, natomiast koszty jednostkowe to 3 i 5 PLN. Do wyprodukowania wyrobu A potrzeba odpowiednio 3 jednostek surowca P i 8 jednostek surowca Q, natomiast w przypadku wyrobu B zużycie to wynosi odpowiednio 4 i 6 jednostek. W magazynie dobowy zapas obu surowców wynosi dla P 24 jednostek, natomiast dla Q jest 48 jednostek. Jaka powinna być struktura produkcji wyrobów A i B, jeżeli kryterium optymalizacji będzie maksymalizacja zysku zakładu?

Zadanie 15. Farmer ma 45 akrowe gospodarstwo, w którym zamierza uprawiać pszenicę i kukurydzę. Można sprzedać co najwyżej 140 t. pszenicy po 30\$ za tonę i 120 t. kukurydzy po 50\$ za tonę. Każdy obsiany akr daje 5 t. pszenicy lub 4 t. kukurydzy. Zebranie z jednego akra pszenicy wymaga 6 godzin a kukurydzy 10 godzin pracy farmera. Farmer może wynająć do 350 godzin po 10\$ za godzinę. Sformułuj model liniowy maksymalizujący zysk farmera.

Zadanie 16. Firma produkuje pewien wyrób stosując trzy różne technologie T_1 , T_2 i T_3 . Wyrób wytwarzany jest z trzech surowców S_1 , S_2 i S_3 . Ilość surowców potrzebnych do wytworzenia 1 sztuk wyrobu zależy od zastosowanej technologii i jest podana w poniższej tabeli:

	T_1	T_2	T_3
S_1	20	15	5
S_2	2.5	5	10
S_3	0	2.5	15

Firma dysponuje następującym zapasem surowców: S_1 2700 sztuk, S_2 750 sztuk, S_3 450 sztuk. Ponieważ technologia T_1 jest najbardziej kosztowna, to można za jej pomocą wytworzyć maksymalnie 30% wszystkich produkowanych wyrobów. Ile wyrobów należy produkować za pomocą każdej z technologii, aby łączna ilość wyprodukowanych wyrobów była jak największa?

Zadanie 17 ([?, Zadanie 25 §1.2]). Dwa gatunki węgla A i B zawierają zanieczyszczenia fosforem i popiołem. W pewnym procesie przemysłowym potrzeba co najmniej 90 ton żeliwa zawierającego nie więcej niż 0,03% fosforu i nie więcej niż 4% popiołu. Procent zanieczyszczeń i ceny zakupu poszczególnych gatunków węgla (w jednostkach względnych) podaje tablica

Gatunek węgla	Procentowa zawartości zanieczyszczeń		cena zakupu 1 tony węgla (jednostek. wzg.)
	fosforu	popiołu	
A	0,02	3	500
B	0,05	5	400

Jak zmieszać wymienione dwa gatunki węgla, aby uzyskać paliwo o możliwie najniższym koszcie, spełniające wyżej wymienione wymagania?

Zadanie 18. Zakład wytwarza dwa rodzaje przecierów: SMAK i ŁASUCH. Produkty są pakowane w identyczne opakowania, których łącznie dziennie można zużyć maksymalnie 8000 sztuk. Sprzedaż każdego opakowania przecieru SMAK przynosi 0,40 PLN zysku a ŁASUCHA ze względu na promocję stratę 10 gr na opakowaniu. Aby ŁASUCH zaistniał na rynku musi być produkowany co najmniej w ilości 1000 opakowań dziennie. Jednak ze względów ekonomicznych ustalono, że jego produkcja nie może przekroczyć 250% przecieru SMAK i dodatkowo 1000 opakowań. Ze względów technologicznych produkcja przecieru SMAK może być co najwyżej trzy razy taka jak przecieru ŁASUCH. Ustal wielkość dziennej produkcji obu przecierów maksymalizujący zysk ze sprzedaży. Uwzględniając podane ograniczenia, ułożyć zadanie PL określające dla tego zakładu wielkość dziennej produkcji obu przecierów tak, aby związany z tą produkcją zysk był maksymalny.

Zadania zostały zaczerpnięte m. in. z:

1. zasoby.open.agh.edu.pl/~08tdobrzynski
2. www.bopis.po.opole.pl/pl_przyklad.html
3. mieczyslaw_polonski.users.sggw.pl/zadania%20tekstowe%20z%20PL.pdf
4. math.uni.lodz.pl/~rafkam/programowanie liniowe.pdf
5. wzr.pl/~azamojska/pliki/Ekonometria/wyk6.DOC

6. www.ioz.pwr.wroc.pl/pracownicy/kasperski/bop/lista1.pdf
7. rg1.polsl.pl/kaula/Opt_proc_gorn.doc
8. www.matematyka.pl/290870.htm
9. oraz z propozycji prowadzących ćwiczenia na zaliczenie wykładu.

Ponadto proszę zapoznać się z zadaniami z drugiej grupy laboratoryjnej prowadzonej przez dr A. Stocką/dr. T. Czyżyckiego.

Literatura

- [1] K. Kukula, redaktor. *Badania operacyjne w przykładach i zadaniach*. PWN, Warszawa, 2001.