Ćwiczenia siódme*
Badania operacyjne (lista 5)
kierunek: matematyka, studia I°
specjalność: matematyka finansowa.

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. *Pewna firma posiada w sprzedaży telewizory rozmieszczone w czterech hurtowniach: A_1, A_2, A_3, A_4 w ilościach odpowiednio 20, 40, 50, 30 sztuk. Firma ta sprzedaje telewizory do trzech sklepów: B_1, B_2, B_3, przy czym zapotrzebowanie tych sklepów wynosi odpowiednio 50, 60, 30 sztuk. Koszty jednostkowe transportu pomiędzy poszczególnymi hurtowniami a sklepami podaje tabela. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia transportowego minimalizujące koszty transportu.*

	B_1	B_2	B_3
A_1	5	4	6
A_2	7	3	3
A_3	6	5	2
A_4	4	2	1

Zadanie 2. *Dana jest tablica transportowa pewnego zagadnienia transportowego:*

	O_1	O_2	O_3	*podaż*
D_1	2	5	4	20
D_2	1	3	6	30
D_3	2	2	7	20
popyt	25	28	17	

1. *Znaleźć za pomocą metody potencjałów plan przewozów minimalizujący łączne koszty transportu.*
2. *Pierwsze rozwiązanie wyznaczyć metodą minimalnego elementu macierzy.*

Zadanie 3. *Przedsiębiorstwo posiadające trzy zakłady wysyła swoje produkty do trzech hurtowni. Podaż zakładów wynosi: 15, 15, 25 ton, natomiast popyt hurtowni: 31, 13, 11 ton. Jednostkowe koszty transportu zawiera tabela:*

	H_1	H_2	H_3
Z_1	9	6	5
Z_2	2	5	7
Z_3	3	11	6

Wyznaczyć optymalny plan dostaw minimalizujący całkowity koszt transportu. Podać wielkość optymalnego kosztu.

Zadanie 4. *Hurtownia „Bez Kantów" posiada w kraju trzy oddziały terenowe, w których znajduje się 72, 46 oraz 60ton mąki. Mąkę tę należy rozwieźć do trzech odbiorców zgłaszających zapotrzebowanie w wysokości 27, 50 i 47 ton mąki. Jednostkowe koszty transportu (zł/tonę) mąki pomiędzy hurtowniami a odbiorcami podaje tabela:*

	odbiorcy		
hurtownie	*I*	*II*	*III*
I	33	20	21
II	45	15	35
III	26	25	22

1. *Ustal plan dostaw mąki z hurtowni do odbiorców, z którym związany byłby minimalny koszt transportu.*

2. *Jak zmieni się optymalny plan przewozu w przypadku żądania, aby:*

   (a) *drugi odbiorca nie otrzymał mąki z drugiej hurtowni;*

   (b) *z pierwszej hurtowni wywieźć cały zapas mąki;*

   (c) *z pierwszej hurtowni wywieźć co najmniej 60 ton mąki.*

Zadanie 5. *Projektowana jest budowa trzech zakładów mleczarskich zaopatrujące w masło cztery miejscowości P, R, S, T. Zakłady mogą powstać w miejscowościach P, R, S. Dzienne zdolności produkcyjne zakładów* A_i*, zapotrzebowanie miast na masło* B_j *(w kg.) oraz oszacowane przyszłe jednostkowe koszty produkcji* p_i *i przewozu masła* c_{ij} *(w zł. za kg) podano w tabeli:*

c_{ij}	*P*	*R*	*S*	*T*	A_i	p_i
P	0	0,4	0,5	1	3000	8
R	1	0	0,8	0,6	2000	9
S	0,5	0,5	0	0,8	2500	8,4
B_j	1000	2000	1000	1000		

Zaproponować lokalizacje zakładów, zapewniając minimalizację całkowitych kosztów produkcji i transportu masła.

Zadanie 6. *Do pięciu stacji kolejowych nadchodzą i są odprawiane przesyłki całowagonowe. Wielkości przewozu* p_i *i wywozu* w_i *oraz odległości między stacjami podano w tablicy:*

Stacja kolejowa	1	2	3	4	5	p_i
1	0	56	38	132	21	18
2		0	27	46	31	9
3			0	22	44	16
4				0	18	15
5					0	19
w_i	5	13	22	22	7	

Opracować plan przewozu pustych wagonów tak, aby łączna ilość wagonokilometrów była możliwie najmniejsza.

Zadanie 7. *Dwa zakłady produkują jednorodny towar i dostarczają go do trzech odbiorców z wykorzystaniem dwóch punktów pośrednich (magazynów). Bezpośredni transport z zakładów do odbiorców jest niemożliwy. Koszty transportu w zł za tonę podają tabele:*

	M_1	M_2
Z_1	25	20
Z_2	17	15

	O_1	O_2	O_3
M_1	15	17	19
M_2	10	20	12

Moce produkcyjne zakładów wynoszą 50 i 80 ton, popyt odbiorców 25, 25 i 40 ton, zaś pojemność magazynów 70 i 70 ton. Zakłady nie muszą w pełni wykorzystywać swoich mocy produkcyjnych, a magazyny nie składują nadwyżki podaży. Wiedząc, że koszty magazynowania towaru chwilowo przechowywanego w magazynach wynoszą 30 i 37 zł na tonę, ustalić plan przewozów minimalizujący łączne koszty.

1. *Ile wynoszą całkowite koszty transportu z zakładów do magazynów?*

2. *Ile wynoszą całkowite koszty transportu z magazynów do odbiorców?*

3. *Ile wynoszą całkowite koszty magazynowania?*
4. *Ocenić stopień wykorzystania podaży zakładów produkcyjnych.*
5. *Czy pojemności magazynów została w pełni wykorzystana?*
6. *Ile towaru pozostało w magazynie i nie trafiło do odbiorców?*
7. *Ile wynosi minimalny łączny koszt?*

Zadanie 8. *Załóżmy, że mamy macierz czasów przewozu oraz wektory podaży i popytu:*

6	7	3	4	**70**
3	4	6	5	**60**
4	3	4	4	**50**
55	**45**	**45**	**35**	

Należy ułożyć taki plan dostaw, który mógłby być zrealizowany najszybciej, jak to tylko możliwe.

Zadanie 9. *Wyznacz ekstrema lokalne i globalne funkcji jednej zmiennej, gdy*

1. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$,
2. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$,
3. $f(x) = x^2 e^x$.

Zadanie 10. *Wyznacz ekstrema lokalne i globalne funkcji dwóch zmiennych, gdy*

1. $f(x,y) = x^2 + 8xy + y^2 + 2x - 4y + 5$,
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$,
3. $f(x,y) = xy(4 - x - y)$.

Zadanie 11. *Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji f na zbiorze D, gdy*

1. $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$, $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1],\ y \in [0,1]\}$,
2. $g(x,y) = x^2 - y^2$, $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$,
3. $h(x,y) = (y-x)^2 + (x+1)^2$, $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Zadanie 12. *Wyznacz ekstremum warunkowe f przy pomocy funkcji Lagrange'a, gdy*

1. $f(x,y) = xy(4-x-y)$, $\quad x^2 + y^2 = 1$,
2. $g(x,y) = x^3 + xy + y^3$, $\quad x + 2y = 1$,
3. $h(x,y,z) = -\ln x - 2\ln y + 3\ln z$, $\quad x + y = 3,\ y + 2z = 4$.

Zadanie 13. *Z elektrociepłowni energia przesyłana jest do dwóch zużywających ją zakładów produkcyjnych. Funkcja kosztów przesyłania energii do tych zakładów w zależności od wielkości przesyłu (odpowiednio, do zakładu I - x_1 i do zakładu II - x_2) dana jest wzorem*

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 8x_1x_2 + 7x_2^2 - 12x_1 - 4x_2 + 81.$$

Rozdzielić dzienną produkcję energii wynoszącą 16 MWh pomiędzy te dwa zakłady tak, aby zminimalizować koszty przesyłu energii. Podać wysokość tych kosztów.

Zadanie 14. *Zminimalizuj funkcję f na zbiorze*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 49,\ -y \leqslant 0,\ (x-2)^2 + y \leqslant 0\}$$

wykorzystując metodę graficzną oraz warunki Kuhna-Tuckera, gdy

1. $f(x,y) = (x-2)^2 + (y+1)^2$,
2. $g(x,y) = 2x + y$,
3. $h(x,y) = \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ y, & x < 0 \end{cases}$.