Statystyka matematyczna - wykład szósty[1]
Testowanie hipotez.
kierunek: matematyka I°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku

Spis treści

Hipoteza statystyczna i zbiór hipotez dopuszczalnych. I

Testowanie hipotez statystycznych obejmuje zasady i metody sprawdzania określonych przypuszczeń, inaczej założeń, dotyczących parametrów lub postaci rozkładu cech statystycznych populacji generalnej na podstawie wyników z próby prostej.

Definicja

Hipotezą statystyczną nazywamy każdy sąd o zbiorowości generalnej, wydany bez przeprowadzenia badania całkowitego.

Uwaga

Tak więc hipoteza statystyczną jest dowolne przypuszczenie co do rozkładu cechy w populacji generalnej (jego postaci funkcyjnej lub wartości parametrów).

Hipoteza statystyczna i zbiór hipotez dopuszczalnych. II

Definicja

Zbiorem hipotez dopuszczalnych nazywamy zbiór wszystkich możliwych rozkładów, które mogą charakteryzować populację generalną. Standardowo będziemy ten zbiór zapisywać $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$.

Hipoteza statystyczna i zbiór hipotez dopuszczalnych. III

Uwaga

1. *Zauważmy, że elementy zbioru hipotez dopuszczalnych są indeksowane parametrem. Tak więc zbiór hipotez dopuszczalnych można utożsamić z przestrzenią parametrów.*
2. *Hipoteza statystyczna jest pewnym podzbiorem hipotez dopuszczalnych.*
3. *Hipotezę statyczną można więc zapisać następująco*

$$H : \theta \in \Theta_0 \wedge \Theta_0 \subseteq \Theta.$$

Klasyfikacja hipotez statystycznych. I

Podział hipotez ze względu na ilość rozkładów jakie może przyjmować hipoteza

1. prosta – hipoteza jednoznacznie wyznacza rozkład (podzbiór Θ_0, do którego ma należeć parametr, jest jednoelementowy);
2. złożona – hipoteza niejednoznacznie wyznacza rozkład (podzbiór Θ_0, do którego ma należeć parametr co najmniej dwuelementowy).

Podział hipotez ze względu czego dotyczą

1. parametryczna – dotyczy wartości parametrów rozkładu cechy w populacji generalnej;
2. nieparametryczna – (pozostałe hipotezy).

Klasyfikacja hipotez statystycznych. II

Przykład

Załóżmy, że cecha w populacji generalnej ma rozkład skokowy. Wtedy zbiór hipotez dopuszczalnych $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ *zawiera wszystkie możliwe rozkłady skokowe. Ponadto*

- *hipoteza, że cecha w populacji ma rozkład Poissona jest hipotezą nieparametryczna i złożona,*
- *hipoteza, że cecha w populacji ma rozkład Poissona z wartością oczekiwaną równą* 1 *jest hipotezą nieparametryczna i prosta,*
- *hipoteza, że cecha w populacji ma wartość oczekiwaną równą* 1 *jest hipotezą parametryczna i złożona.*

Klasyfikacja hipotez statystycznych. III

Przykład

Załóżmy, że cecha w populacji generalnej ma rozkład normalny. Wtedy zbiór hipotez dopuszczalnych $\{P_\theta : \theta \in \Theta\} = \{\mathcal{N}(m, \sigma) : (m, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$.
Ponadto

- *hipoteza, że cecha w populacji ma rozkład z wartością oczekiwaną równą* 1 *jest hipotezą parametryczna i złożona,*
- *hipotez, że cecha w populacji ma rozkład z parametrem* $(m, \sigma) = (1, 1)$ *jest hipotezą parametryczna i prostą.*

Hipoteza zerowa i alternatywna. I

Przy testowaniu hipotez formułuje się dwie hipotezy zerową i alternatywną.

Definicja

Hipotezą zerową, oznaczaną H_0, nazywamy hipotezę sprawdzaną (testowaną, weryfikowaną).
Hipotezą alternatywną (konkurencyjną), oznaczaną H_1, nazywamy hipotezę, którą jesteśmy skłonni przyjąć, jeżeli odrzucamy hipotezę zerową.

Hipoteza zerowa i alternatywna. II

Uwaga

1. *Prawdziwość hipotezy zerowej jest oceniana na podstawie wyników próby losowej.*
2. *Obie „konkurencyjne” hipotezy traktujemy nierównoprawnie. Zasadniczo, interpretacja jest taka: H_0 jest założeniem obowiązującym do czasu, gdy pojawi się dane doświadczalne sprzeczne (lub raczej „bardzo trudne do pogodzenia”) z tą hipotezą. Z kolei, H_1 jest „ewentualnością, z którą powinniśmy się liczyć”, jeżeli przyjdzie nam zrezygnować z hipotezy H_0.[3]*
3. *Za klasyczną teorią testowania stoi ważna idea metodologiczna. Jest to zasada konserwatyzmu: nie należy rezygnować z ustalonej teorii (hipotezy zerowej), jeżeli nie ma po temu koniecznych lub przynajmniej bardzo wyraźnych powodów.[3]*

Test statystyczny. I

Jak już wiemy, prawdziwość hipotezy zerowej weryfikujemy na podstawie wyników z próby. Dokonujemy tego za pomocą testu statystycznego, który w zależności od rodzaju hipotezy może być

1. testem parametrycznym (dla hipotez parametrycznych),
2. testem nieparametrycznym (w przypadku hipotez nieparametrycznych).

Definicja

Test statystyczny nazywamy regułę postępowania, która przyporządkowuje wynikom próby losowej decyzję przyjęcia lub odrzucenia hipotezy zerowej.

Test statystyczny. II

Uwaga

Formalna definicja testu statystycznego (dokładniej testu statystycznego niezrandomizowanego) jest następująca:
Testem hipotezy H_0 przeciw alternatywie H_1 nazywamy statystykę

$$\delta\colon \mathcal{X} \to \{0, 1\},$$

gdzie $\mathcal{X}$ jest przestrzenią realizacji (obserwacji). Natomiast wartość „1” interpretujemy jako decyzję o odrzuceniu hipotezy H_0, zaś „0” oznacza, że nie odrzucamy H_0.

Test statystyczny. III

Uwaga

Tak więc test statystyczny rozstrzyga, jakie wyniki próby pozwalają uznać, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, a jakie przemawiają za jej odrzuceniem i przyjęciem w to miejsce hipotezy alternatywnej.

Sprawdzian hipotezy i zbiór krytyczny. I

Definicja

Sprawdzianem hipotezy (statystyką testową) nazywamy statystykę Z_n będącą funkcją próby losowej, o znanym rozkładzie, której wartość empiryczna z_n, policzona na podstawie próby losowej, pozwala na podjęcie decyzji, czy przyjąć, czy też odrzucić hipotezę zerową.

Uwaga

Jeżeli testem statystycznym jest δ, to najczęściej mamy

$$\delta(X) = \mathbb{I}_{\{T(X)>c\}},$$

gdzie $X = (X_1, \dots, X_n)$ jest próbą losową, $T(X)$ jest pewną statystyką testową, a c wartością krytyczną.

Sprawdzian hipotezy i zbiór krytyczny. II

Definicja

Zbiorem krytycznym Λ (obszarem odrzucenia) nazywamy zbiór tych wartości sprawdzianu hipotezy, które przemawiają za odrzuceniem hipotezy zerowej.

Uwaga

Zauważmy, że dla testu δ mamy

$$\Lambda := \{x \in \mathcal{X} : \delta(x) = 1\}.$$

Sprawdzian hipotezy i zbiór krytyczny. III

1. W przypadku hipotez parametrycznych sprawdzianem hipotezy jest estymator lub określona funkcja estymatora tego parametru, którego dotyczy weryfikowana hipoteza. Postać tej zmiennej losowej zależy od tego, w jakich warunkach przebiegu testowanie, czyli jakie są założenia o rozkładzie cechy w zbiorowości generalnej oraz jak dużą próbą dysponujemy.
2. Zbiór Λ może być w zależności od postaci hipotezy alternatywnej zbiorem jednostronnym (prawostronnym lub lewostronnym) albo zbiorem dwustronnym. Mówimy wtedy również, że test statystyczny jest jednostronny (prawostronny, lewostronny) lub dwustronny. Rozkład sprawdzianu hipotezy określa, z jakich tablic należy odczytać wartość krytyczną, wyznaczającą zbiór Λ, a zatem zbiór Λ zależy również od liczebności próby n, od tego, czy znamy parametry (m, σ lub p) w zbiorowości generalnej oraz od poziomu istotności α.

Etapy konstrukcji testu statystycznego. I

1. Formułowanie hipotezy podlegającej weryfikacji tzn. hipotezy zerowej
$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \wedge \Theta_0 \subseteq \Theta.$$
2. Formułowanie hipotezy alternatywnej
$$H_1 : \theta \in \Theta_1 \wedge \Theta_1 \subseteq \Theta,$$
będącej zaprzeczeniem[2] hipotezy zerowej. Przyjmiemy ją za prawdziwą w przypadku odrzucenia hipotezy zerowej.
3. Określenie sprawdzianu hipotezy.
4. Określenie zbioru krytycznego hipotezy.

Etapy konstrukcji testu statystycznego. II

Uwaga

Niech W będzie przestrzenią próby[a], $z_n = Z_n(x_1, \ldots, x_n)$ *jej konkretna realizacją,* Λ *obszarem krytycznym. Jeżeli* $z_n \in \Lambda$, *to hipotezę zerową odrzucamy. Natomiast jeśli* $z_n \in W \setminus \Lambda$, *to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.*

[a] Jest to zbiór wszystkich możliwych wyników próby.

[2] Nie musi być to całkowita negacja hipotezy zerowej.

Błędy testowania hipotez. I

Błędy testowania hipotez dzielimy na

1. błąd I-go rodzaju, oznaczany α – odrzucenie na podstawie wyników z próby hipotezy zerowej, która jest prawdziwa

$$\Theta_0 \ni \theta \mapsto \alpha(\theta) := P_\theta(\{Z_n \in \Lambda\}). \tag{1}$$

2. błąd II-go rodzaju, oznaczany β – przyjęcie na podstawie wyników z próby hipotezy zerowej, która jest fałszywa

$$\Theta_1 \ni \theta \mapsto \beta(\theta) := P_\theta(\{Z_n \in W \setminus \Lambda\}) \quad \text{dla } \theta \in \Theta_1. \tag{2}$$

Błędy testowania hipotez. II

Uwaga

Dla testu $\delta = \mathbb{I}_{\{T(X)>c\}}$ *hipotezy* H_0 *przeciwko hipotezie* H_1, *gdzie* $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$ *rozpatruje się odwzorowanie*

$$\Theta \ni \theta \mapsto P_\theta(\{\delta(X) = 1\}) = 1 - \beta(\theta)$$

nazywane mocą testu i wtedy

- *błąd I-go rodzaju to* $\Theta_0 \ni \theta \mapsto \alpha(\theta) = 1 - \beta(\theta) = P_\theta(\{\delta(X) = 1\})$,
- *błąd II-go rodzaju to* $\Theta_1 \ni \theta \mapsto \beta(\theta) = P_\theta(\{\delta(X) = 0\})$.

Błędy testowania hipotez. III

		hipoteza zerowa H_0	
		prawdziwa	fałszywa
decyzja dla H_0	przyjąć	brak błędu	błąd II-go rodzaju
	odrzucić	błąd I-go rodzaju	brak błędu

Tabela: Opracowanie własne.

Uwaga w statystyce rozważa się macierz błędów inaczej tablice pomyłek

		klasa rzeczywista	
		pozytywna	negatywna
klasa predykowana	pozytywna	true positve (TP)	false positive (FP)
	negatywna	false negative (FN)	true negative (TN)

Tabela: Opracowanie własne.

Błędy testowania hipotez. IV

Uwaga

1. *Wartości α są bliskie zera i na ogół są równe 0,01; 0,02; 0,05; 0,1.*
2. *Dobry test statystyczny powinien mieć tę własność, że również β powinno być bliskie zera.*
3. *Wartości α i β są wzajemnie powiązane i zmniejszenie jednej z nich powoduje zwiększenie drugiej.*
4. *Testy konstruuje się tak, aby przy ustalonym α, minimalizować β.*

Błędy testowania hipotez. V

Przykład ([2, Przykład 9.1])

Cecha X ma w zbiorowości generalnej rozkład $\mathcal{N}(m, 4)$. Na podstawie czteroelementowej próby należy zweryfikować hipotezę H_0, że wartość przeciętna jest równa 10, wobec hipotezy H_1, że wartość przeciętna wynosi 15. Przyjmujemy taką regułę postępowania, że hipotezę H_0 odrzucamy, gdy X obliczone na podstawie próby przyjmuje wartość większą od 13. Należy obliczyć prawdopodobieństwa popełnienia błędu I-go i II-go rodzaju oraz podamać ilustrację graficzną obliczonych prawdopodobieństw.

$$\begin{aligned} H_0 : &\qquad m = 10, \\ H_1 : &\qquad m = 15. \end{aligned}$$

Moc testu statystycznego. I

Definicja

Mocą testu, oznaczaną $M(\Lambda)$, nazywamy prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej hipotezy zerowej i przyjęcia w to miejsce prawdziwej hipotezy alternatywnej było największe, czyli prawdopodobieństwo podjęcia słusznej decyzji podczas weryfikowania hipotezy

$$M(\Lambda) = P_\theta(\{Z_n \in \Lambda\}) \quad \theta \in \Theta_1.$$

Definicja

Testem najmocniejszym nazywamy taki, że jego moc $M(\Lambda)$ jest największa tzn. przy ustalonym α prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej hipotezy zerowej i przyjęcia w to miejsce prawdziwej hipotezy alternatywnej było największe.

Moc testu statystycznego. II

Uwaga

1. *Zauważmy, że* $M(\Lambda) = 1 - \beta(\theta)$.
2. *Oznacza to, że test jest tym mocniejszy, im mniejsze jest prawdopodobieństwo popełnienia błędu II-go rodzaju.*

Test zgodny

Definicja

Test statystyczny jest testem zgodnym, jeśli wraz ze wzrostem liczebności próby moc testu osiąga wartości coraz bliższe 1, tzn. gdy zachodzi relacja

$$\lim_{n \to \infty} M(\Lambda) = 1.$$

Spis treści

Test istotności. I

Definicja

Mówimy, że δ jest testem na poziomie istotności α jeżeli

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(\{\delta(X)=1\}) \leqslant \alpha. \tag{3}$$

Uwaga

W przypadku hipotezy prostej warunek (3) ma postać

$$P_{\theta_0}(\{\delta(X)=1\}) \leqslant \alpha.$$

Do najczęściej stosowanych w praktyce testów statystycznych należą testy istotności, nazywane tak ze względu na to, że w testach tych uwzględnia się tylko poziom istotności. Testy te mają taką własność, że dla zadanego z góry poziomu istotności α zapewniają możliwie najmniejszą wartość

Test istotności. II

błędu II-go rodzaju, czyli możliwie największą moc. Testy te są również testami zgodnymi.
W testach istotności zdecydowanie odrzuca się hipotezę zerową, gdy wartość sprawdzianu wpada do zbioru krytycznego, w przeciwnym wypadku orzeka się tylko, że nie ma podstaw do odrzucenia tej hipotezy.
Zakładać będziemy, że mamy do dyspozycji wyniki obserwacji dla prób prostych.

Uwaga

W praktyce np. w testach dostępnych w programach statystycznych podawana jest ***p-wartość*** *(ang. p-value). Przedstawmy jej definicję.*

Test istotności. III

Definicja

Załóżmy, że test ma postać $\delta(X) = \mathbb{I}_{\{T(X)>c\}}$. *Poziom krytyczny testu lub inaczej p-wartość jest to najmniejszy poziom istotności przy którym odrzucamy hipotezę* H_0 *tzn. jeśli zaobserwujemy* $x \in \mathcal{X}$, *to*

$$P = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\{T(X) > T(x)\}).$$

Ogólne zasady konstrukcji testów istotności. I

1. Formułujemy hipotezę zerową i alternatywną.
2. Na podstawie próby losowej $(X_1, \ldots, X_n)$ wyznaczamy statystykę Z_n (sprawdzian hipotezy), której rozkład określamy przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza zerowa.
3. Dla ustalonego z góry „*małego*” prawdopodobieństwa α wyznaczamy obszar krytyczny Λ tak, aby

$$P(\{Z_n \in \Lambda\}) = \alpha.$$

4. Jeżeli konkretna realizacja próby należy do Λ, to hipotezę zerową odrzucamy, w przeciwnym wypadku nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Uwaga

α jest poziom istotności (prawdopodobieństwem popełnienia błędu I-go rodzaju). W praktyce $\alpha \in [0{,}01; 0{,}1]$.

Ogólne założenia

Zakładamy, że rozkład cechy w zbiorowości generalnej jest rozkładem normalnym $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Wybór sprawdzianu hipotezy zależy od liczebności próby n oraz od tego, czy parametr σ w zbiorowości generalnej jest znany. I tak, jeśli:

- σ jest znane i $n \leqslant 30$ albo
- σ jest znane i $n > 30$ lub
- σ jest nieznane i $n > 30$, ale wówczas $\sigma \approx s$,

to sprawdzianem hipotezy $H_0 : m = m_0$ jest statystyka

$$U = \frac{\overline{X} - m}{\sigma}\sqrt{n}$$

o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$.

Natomiast, gdy σ jest nieznane i $n \leqslant 30$, sprawdzianem tej hipotezy jest:

$$T = \frac{\overline{X} - m}{S}\sqrt{n-1} \quad \text{lub} \quad T = \frac{\overline{X} - m}{\tilde{S}}\sqrt{n}$$

o rozkładzie Studenta z $n - 1$ stopniami swobody.

Ogólne założenia

W przypadku znanego odchylenia standardowego lub też nieznanego odchylenia standardowego, lecz dużej próby

1. Estymator - średnia z próby $\overline{X}$.
2. Hipoteza zerowa $H_0 : m = m_0$.
3. Jeżeli hipoteza zerowa jest prawdziwa, to $\overline{X}$ ma rozkład $\mathcal{N}\left(m_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.
4. Sprawdzian hipotezy - statystyka $U = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$, która ma rozkład normalny standardowy.
5. Poziom istotności α.
6. Parametrem opisującym rodzinę rozkładów jest $\theta \equiv m$. Będziemy też pisać θ_0 zamiast m_0.

Przypadek I. I

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

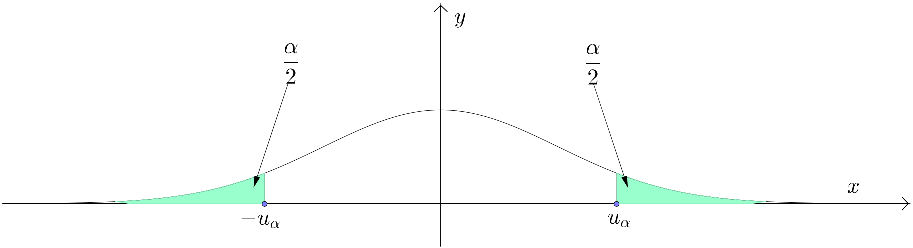
$$\begin{aligned} H_0 : &\quad m = m_0 \\ H_1 : &\quad m \neq m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P_{\theta_0}(\{|U| \geqslant u_\alpha\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{u : |u| \geqslant u_\alpha\}$, u_α wartość krytyczna, $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Przypadek I. II



Rysunek: Obustronny obszar krytyczny testu istotności dla średniej populacji normalnej ze znanym σ.

Przypadek II. I

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

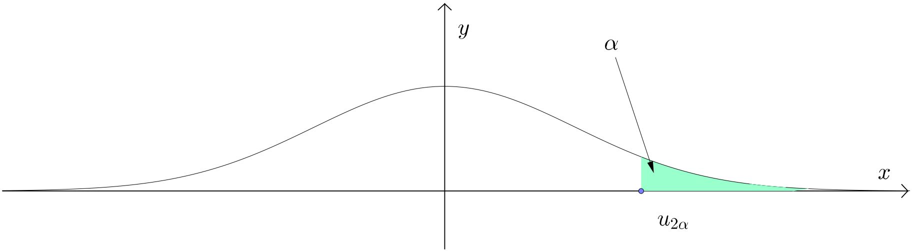
$$\begin{aligned} H_0 : &\quad m = m_0 \\ H_1 : &\quad m > m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P_{\theta_0}(\{U \geqslant u_{2\alpha}\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{u : u \geqslant u_{2\alpha}\}$, $u_{2\alpha}$ wartość krytyczna, $\Phi(u_{2\alpha}) = 1 - \alpha$.

Przypadek II. II



Rysunek: Prawostronny obszar krytyczny testu istotności dla średniej populacji normalnej ze znanym σ.

Przypadek III. I

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

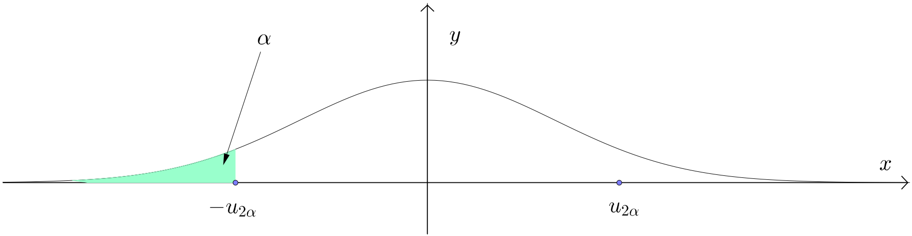
$$\begin{aligned} H_0: &\quad m = m_0 \\ H_1: &\quad m < m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P_{\theta_0}(\{U \leqslant -u_{2\alpha}\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{u : u \leqslant -u_{2\alpha}\}$, $-u_{2\alpha}$ wartość krytyczna, $\Phi(u_{2\alpha}) = 1 - \alpha$.

Przypadek III. II



Rysunek: Lewostronny obszar krytyczny testu istotności dla średniej populacji normalnej ze znanym σ.

Przykłady. I

Przykład ([1, Przykład 11.2])

Czas montowania elementu T w automatycznej pralce bębenkowej jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Norma techniczna przewiduje na tę czynność 6 minut. Natomiast wśród jej wykonawców panuje pogląd, że ten czas jest zbyt krótki. Zweryfikujemy tą hipotezę na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$*, przy założeniu, że standardowe odchylenie czasu montowania wynosi* $\sigma = 1{,}5$ *minuty. Badanie przeprowadzono w grupie 25 robotników i ich średni czas montowania przez nich wynosił* $\overline{X} = 6\frac{1}{3}$ *minuty.*

Rozwiązanie.

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko H_1, gdzie

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad m = 6 \\ H_1 : &\quad m > 6. \end{aligned}$$

Przykłady. II

$$U = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{6\frac{1}{3} - 6}{1{,}5}\sqrt{25} \approx 1{,}1.$$

Mamy w tym wypadku prawostronny obszar krytyczny

$$P(\{U \geqslant u_{0,1}\}) = 0{,}05,$$

gdzie $\Phi(u_{0,1}) = 1{,}65$, a więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. $\square$

Ogólne założenia

W przypadku nieznanego odchylenia standardowego i małej próby

1. Estymator – średnia z próby $\overline{X}$.
2. Hipoteza zerowa $H_0 : m = m_0$.
3. Sprawdzian hipotezy – statystyka $T = \frac{\overline{X}-m_0}{S}\sqrt{n-1}$.
4. Jeżeli hipoteza zerowa jest prawdziwa, to $\overline{X}$ ma rozkład t-Studenta o $n-1$ stopniach swobody.
5. Poziom istotności α.
6. Parametrem opisującym rodzinę rozkładów jest $\theta \equiv m$. Będziemy też pisać θ_0 zamiast m_0.

Przypadek I. I

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

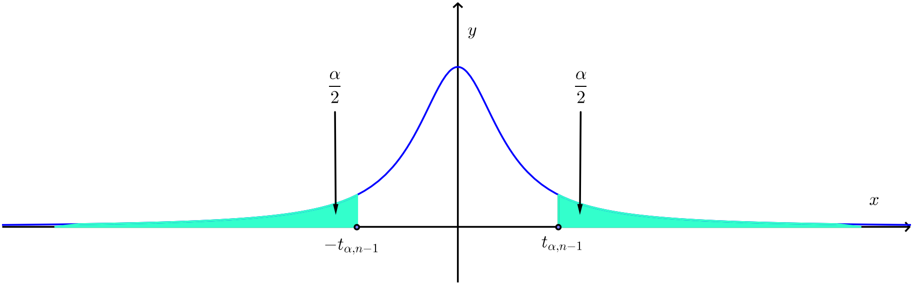
$$\begin{aligned} H_0: &\quad m = m_0 \\ H_1: &\quad m \neq m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P(\{|T| \geqslant t_\alpha\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{t : |t| \geqslant t_\alpha\}$, t_α wartość krytyczna.

Przypadek I. II



Rysunek: Obustronny obszar krytyczny testu istotności dla średniej populacji normalnej z nieznanym σ.

Przypadek II.

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad m = m_0 \\ H_1 : &\quad m > m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P(\{T \geqslant t_{2\alpha}\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{t : t \geqslant t_{2\alpha}\}$, $t_{2\alpha}$ wartość krytyczna.

Przypadek III.

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & m = m_0 \\ H_1 : \quad & m < m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P(\{T \leqslant -t_{2\alpha}\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{t : t \leqslant -t_{2\alpha}\}$, $-t_{2\alpha}$ wartość krytyczna.

Przykład. I

Przykład ([1, Przykład 11.3])

Plony żyta na powierzchniach uprawianych w pewnym województwie maja rozkład normalny o nieznanych parametrach. Przyjmując, że średni plon z tych powierzchni wynosi 28 kwintali. Sprawdzimy słuszność hipotezy, przy założeniu, że dla 20 powierzchni otrzymano średni plon 25 kwintali z odchyleniem standardowym 4,5 kwintala. Przyjmiemy poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

ROZWIĄZANIE.

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1

$$\begin{aligned} H_0 : &\qquad m = 28 \\ H_1 : &\qquad m \neq 28. \end{aligned}$$

Przykład. II

$$T = \frac{\overline{X} - m_0}{S}\sqrt{n-1} = \frac{25-28}{4{,}5}\sqrt{19} \approx -2{,}906.$$

Mamy tutaj obustronny obszar krytyczny

$$P(\{|t| \geqslant t_{0,01}\}) = 0{,}01,$$

gdzie jest 19 stopni swobody i $t_{0,01;19} = 2{,}861$ oraz $|t| = 2{,}906 > t_{0,01;19}$. Wartość statystyki z próby znalazła się w obszarze krytycznym, więc odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. □

Założenia w populacji o dowolnym rozkładzie.

1. Hipotez zerowa $H_0 : m = m_0$.
2. Średnia z próby $\overline{X}$ ma asymptotyczny rozkład normalny $\mathcal{N}\left(m_0, \frac{\tilde{s}}{\sqrt{n}}\right)$[3].
3. Sprawdzianem hipotezy jest statystyka $U = \frac{\overline{X} - m_0}{s}\sqrt{n}$, która ma asymptotyczny rozkład normalny standardowy.
4. Poziom ufności α.

[3] $\tilde{s}$ jest asymptotycznie zbieżne do odchylenia standardowego z populacji.

Testowanie hipotez

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad m = m_0 \\ H_1 : &\quad m \neq m_0 \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P(\{|U| \geqslant u_\alpha\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny testu $\{u : |u| \geqslant u_\alpha\}$, u_α wartość krytyczna.

Uwaga

Podobnie, jak w przypadku, gdy znane jest odchylenie standardowe, można wyznaczyć obszary krytyczne dla dwóch kolejnych hipotez alternatywnych.

Ogólne założenia

1. Badamy dwie populacje normalne o rozkładach $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$.
2. Z każdej populacji losujemy próbę losową o liczebnościach równych odpowiednio n_1 i n_2.
3. Hipoteza zerowa $H_0 : m_1 = m_2$.
4. Estymatorem jest różnica średnich $\overline{X_1} - \overline{X_2}$ o rozkładzie $\mathcal{N}\left(m_1 - m_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.
5. Poziom ufności α.
6. W zależności od założeń dotyczących zbiorowości generalnych oraz od liczebności prób – sprawdzian hipotezy H_0 ma różną postać i jest związany z rozkładem normalnym lub rozkładem t-Studenta.

Sprawdzian hipotezy. I

Jeśli

- σ_1, σ_2 - znane i $n_1 \leqslant 30, n_2 \leqslant 30$,
- σ_1, σ_2 - znane i $n_1 > 30, n_2 > 30$,
- σ_1, σ_2 - nieznane i $n_1 > 30, n_2 > 30$ to $\sigma_1^2 \approx s_{(1)}^2$, $\sigma_2^2 \approx s_{(2)}^2$,

wówczas sprawdzian hipotezy ma postać

$$U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

który, przy założeniu prawdziwości H_0, ma rozkład normalny standardowy. W przypadku, gdy

- σ_1, σ_2 - nieznane i $\sigma_1 = \sigma_2$, $n_1 \leqslant 30, n_2 \leqslant 30$,

Sprawdzian hipotezy. II

to korzystamy ze sprawdzianu hipotezy

$$T = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

gdzie s_p^2 jest wariancją prób połączonych, który, przy założeniu prawdziwości H_0, ma rozkład t-Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody. Ponadto wyraża się wzorem $s_p^2 = \frac{(n_1-1)\tilde{s}_1^2+(n_2-1)\tilde{s}_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{n_1 s_1^2+n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}$.

Znane odchylenia standardowe w populacjach

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

$$
\begin{aligned}
H_0 : \quad & m_1 = m_2 \\
H_1 : \quad & m_1 \neq m_2 .
\end{aligned}
$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej sprawdzianem testu jest statystyka

$$U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

Dla poziomu ufności α mamy

$$P(\{|U| \geqslant u_\alpha\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny testu $\{u : |u| \geqslant u_\alpha\}$.

Odchylenia standardowe nieznane, ale równe

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

$$\begin{aligned} H_0: &\quad m_1 = m_2 \\ H_1: &\quad m_1 \neq m_2. \end{aligned}$$

Przy założeniu równości odchyleń standardowych $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ i hipotezy zerowej sprawdzianem testu jest statystyka

$$T = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}.$$

Mamy $P(\{|t| \geqslant t_\alpha\}) = \alpha$.

Ogólne założenia. I

Populacje dowolne (duże próby)

1. Z każdej populacji losujemy próbę losową o liczebnościach równych odpowiednio n_1 i n_2.
2. Formułujemy hipotezę zerową i alternatywną

$$\begin{aligned} H_0: &\quad m_1 = m_2 \\ H_1: &\quad m_1 \neq m_2, \end{aligned}$$

   i przyjmujemy poziom ufności α.
3. Estymatorem jest różnica średnich $\overline{X_1} - \overline{X_2}$ o rozkładzie $\mathcal{N}\left(m_1 - m_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

Ogólne założenia. II

4. Wykorzystujemy statystykę $U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$, która przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, ma asymptotyczny rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$.
5. Tak więc jest $P(\{|U| \geqslant u_\alpha\}) = \alpha$ i obszar krytyczny testu $\{u : |u| \geqslant u_\alpha\}$.

Przykład. I

Przykład ([1, Przykład 11.4])

Przypuszcza się, że młodsze osoby łatwiej decydują się na zakup nowych, nieznanych produktów. Badanie przeprowadzone wśród przypadkowych 20 nabywców nowego produktu i 22 nabywców znanego już wyrobu pewnej firmy dostarczyło następujących informacji o wieku klientów

- *kupujący nowy produkt: średnia 27,7; odchylenie 5,5,*
- *kupujący znany produkt: średnia 32,1; odchylenie 6,3.*

Zweryfikujemy hipotezę, że średni wiek kupujących nowy produkt (m_1) jest równy średniemu wiekowi (m_2) kupujących znany produkt, przy poziome istotności $\alpha = 0{,}05$.

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad m_1 = m_2 \\ H_1 : &\quad m_1 < m_2. \end{aligned}$$

Przykład. II

ROZWIĄZANIE.
Zakładamy, że rozkład wieku obu zbiorowości jest normalny i charakteryzuje się tym samym odchyleniem standardowym. Stosując statystykę $t = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$ otrzymujemy $s_p^2 = 35{,}206$,
$t = \frac{27{,}7 - 32{,}1}{\sqrt{35{,}206\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{22}\right)}} = -2{,}4$.
Lewostronny obszar krytyczny określa równość $P(\{t \leqslant -t_{2\alpha}\}) = \alpha$. W naszym wypadku $t_{2\alpha} = t_{0,1;40} = -1{,}684$.
Wartość statystyki z próby znalazła się w obszarze krytycznym, więc odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. □

Bibliografia

J. Jóźwiak i J. Podgórski. *Statystyka od podstaw*. Wyd. 5 zmienione. Warszawa: PWE, 2000.

St. Ostasiewicz, Z. Rusnak i U. Siedlecka. *Statystyka. Elementy teorii i Zadania*. Wyd. 5 poprawione. Wrocław: Wyd. Akademii Ekonomicznej im. Oskara Langego we Wrocławiu, 2003.

Niemiro Wojciech. *Statystyka I*. 2014.