Lista 1
Procesy stochastyczne
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

2015/2016

Zadanie 1. *Udowodnić fakty podane na wykładach.*

Zadanie 2. *Zmienna losowa* (X, Y) *ma gęstość* $g(x, y) = \frac{x^3}{2} \exp(-x(y+1)) \mathbb{I}_{\{x>0, y>0\}}$. *Wyznacz* $E(Y|X)$ *oraz* $E(Y^2|X)$.

Zadanie 3. *Niech* $\Omega = [0, 1]$ *i prawdopodobieństwo na* Ω *zadaje miara Lebesgue'a. Znajdź warunkową wartość oczekiwaną* $E(f|\mathcal{F})$, *gdzie* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *oraz*

- $\mathcal{F} = \sigma\left(\left[0, \frac{1}{2}\right], \mathbb{Q} \cap [0, 1]\right)$ *i* $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ \sqrt{x} & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$,
- $\mathcal{F} = \sigma\left(\left[0, \frac{1}{4}\right[, \left[\frac{1}{4}, 1\right]\right)$ *i* $f(x) = \sqrt{x}$,
- $\mathcal{F} = \sigma\left(\left[0, \frac{1}{2}\right[, \left[\frac{1}{3}, 1\right]\right)$ *i* $f(x) = x$.

Zadanie 4. *Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, P) = ([0; 1], \mathcal{B}([0; 1]), m_L)$, ξ *i* η *zmienne losowe zadane następująco*

1.

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right[\\ 2 & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\\ 3 & x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right] \end{cases} \quad i \quad \eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 2 & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

2.

$$\xi(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 1 & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} \quad \eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in \left[0, \frac{1}{3}\right[\\ 1 & x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[\\ x^2 & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Opisz $\sigma(\xi)$. *Wyznacz* $E(\eta|\xi = x)$ *i* $E(\eta|\xi)$.

Zadanie 5. *Niech wektor* (X, Y) *ma rozkład jednostajny na trójkącie o wierzchołkach* $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$. *Wyznacz gęstość warunkową* $f_{X|Y}(x|y)$ *a następnie wyznacz* $E(X|Y)$.

Zadanie 6. *Niech* X, Y *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Pokaż, że* $E(X|X+Y) = \frac{X+Y}{2}$.

Zadanie 7. *Uogólnić wynik poprzedniego zadania na przypadek* n *zmiennych losowych.*

Zadanie 8. *Niech* $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, P *- miara Lebesgue'a. Wyznacz* $E(f|\mathcal{G})$ *w przypadkach:*

- $f = X$, $\mathcal{G} = \sigma(Y)$,
- $f = X - Y$, $\mathcal{G} = \sigma(X + Y)$,

- $f = X^2 Y$, $\mathcal{G} = \sigma(Y)$.

Zadanie 9. *Rozpatrzmy* $\Omega = [0,1]$, *σ-ciało zbiorów borelowskich i P miarę Lebesgue'a na* $[0,1]$. *Opisz* $\sigma(Y)$ *i znajdź* $E[X|Y]$, *jeśli*

1. $X(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$, $Y(x) = \sin \pi x$,
2. $X(x) = e^x$, $Y(x) = \cos^2 \pi x$,
3. $X(x) = e^{2x}$, $Y(x) = \begin{cases} 2 & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 3 & x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[\\ x & x \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}$.

Zadanie 10. *Niech* $\Omega = [0,1]$, Σ *będzie σ-ciałem zbiorów mierzalnych* Ω, *zaś P będzie miarą Lebesgue'a na* $[0,1]$. *Wyznacz* $E(f|\mathcal{H})$, *gdzie* $f(x) = x$ *i* $\mathcal{H}$ *jest σ-ciałem generowanym przez*

1. $\{[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{4}, 1]\}$;
2. $\{[0, a], [b, 1]\}$, *gdzie* $a, b \in \mathbb{R}$;

Rozważyć w punkcie (2) różne warianty odpowiedzi.