Lista 5
Procesy stochastyczne
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

2015/2016

Zadanie 1. *Udowodnić fakty podane na wykładach.*

Uwaga 1. *O ile nie jest powiedziane inaczej rozważamy standardowy proces Wienera.*

Zadanie 2. *Udowodnij, że dla dowolnej liczby* $p \geqslant 1$ *proces Wienera jest procesem rzędu* p.

Zadanie 3. *Wyznacz funkcję kowariancji procesu Wienera.*

Zadanie 4. *Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych* t *i* s *takich, że* $s \leqslant t$ *rozkłady zmiennych* $W_t - W_s$ *i* W_{t-s} *są identyczne.*

Zadanie 5. *Udowodnij, że dla dowolnej liczby dodatniej* c *i dowolnej liczby nieujemnej* t *rozkłady zmiennych* W_{ct} *i* $\sqrt{c}W_t$ *są identyczne.*

Zadanie 6. *Udowodnij, że prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera są lokalnie hölderowsko ciągłe z dowolnym parametrem* $\gamma < 1/2$.

Zadanie 7. *Udowodnij, że*

1. *proces Wienera* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *jest* $(\mathcal{F}_t^W)$*-martyngałem,*
2. *proces Wienera* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *jest* $(\mathcal{F}_t)$*-martyngałem.*

Zadanie 8. *Dany jest proces Wienera* $(W_t)_{t\geqslant 0}$. *Udowodnij, że*

1. $(W_t^2)_{t\geqslant 0}$ *jest* $(\mathcal{F}_t^W)$*-podmartyngałem,*
2. $(W_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ $(\mathcal{F}_t^W)$*-martyngałem.*

Zadanie 9. *Niech* $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, *a*

1. $Y = \exp(X)$,
2. $Y = \exp(\lambda X)$, *gdzie* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wyznacz $E(Y)$.

Zadanie 10 (Martyngał exponencjalny)**.** *Dany jest proces Wienera* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ *oraz dowolna liczba rzeczywista* λ. *Udowodnij, że proces* $\left(\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)_t\right)_{t\geqslant 0}$ *jest* $(\mathcal{F}_t)$*-martyngałem.*

Zadanie 11 (symetria)**.** *Niech*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ G_t \stackrel{\text{def}}{=} -W_t.$$

Udowodnij, że proces $(G_t)_{t\geqslant 0}$ *jest procesem Wienera.*

Zadanie 12 (skalowanie)**.** *Niech c będzie ustaloną liczbą dodatnią i niech ponadto*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c}W_{c^2t}.$$

Udowodnij, że proces $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

Zadanie 13 (odwrócenie czasu)**.** *Niech*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} tW_{\frac{1}{t}} & t>0 \\ 0 & t=0 \end{cases}.$$

Udowodnij, że proces $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

Zadanie 14 (jednorodność czasu)**.** *Niech T będzie ustaloną liczbą dodatnią i niech*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ V_t \stackrel{\text{def}}{=} W_{T+t} - W_T.$$

Udowodnij, że proces $(V_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

Zadanie 15 (odbicie)**.** *Niech $T \geqslant 0$ będzie ustalone. Określamy proces*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} W_t & \text{dla } t\leqslant T \\ 2W_T - W_t & \text{dla } t>T \end{cases}.$$

Udowodnij, że proces $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

Zadanie 16. *Niech $(W_t)_{t\in[0,1]}$ będzie procesem Wienera na $[0,1]$. Wykaż, że $((1+t)(W_{\frac{t}{1+t}} - \frac{t}{1+t}W_1))_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera na całej półprostej.*

Zadanie 17. *Oblicz parametry liczbowe tj. wartość oczekiwaną, kowariancje i wariancje dla następujących procesów $(X_t)_t$, gdzie*

most Browna: $X_t = W_t - tW_1$, $t\in[0,1]$*;*

ruch Browna z dryfem: $X_t = \mu t + \sigma W_t$, $t \geqslant 0$*;*

geometryczny ruch Browna: $X_t = \exp(\mu t + \sigma W_t)$, $t\geqslant 0$*;*

kolorowy szumu: $X_t = \frac{W_{t+h} - W_t}{h}$, $t\geqslant 0$, $h>0$ *— ustalone;*

proces Ornsteina-Uhlenbecka: $X_t = e^{-t}W_{\exp(2t)}$, $t\geqslant 0$.

Zadanie 18. *Sprawdź, czy proces $(X_t)_{t\geqslant 0}$, gdzie $X_t = \frac{1}{2}(W_{4t+3} - W_3)$ jest*

1. *(F_{4t+3})-martyngałem,*
2. *procesem Wienera.*

Zadanie 19. *Oblicz parametry liczbowe tj. wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję dla procesu $(X_t)_{t\geqslant 0}$, gdzie $X_t = (t+3)W_2 + 3W_t - W_{t+2}$.*

Zadanie 20. *Oblicz*

1. $P(\{W_1 < W_4 + 2\})$,
2. $P(\{W_5 > 4W_3 - 1\})$,
3. $P(\{W_6 > W_4\}|\{W_2 < 0\})$,
4. $P(\{W_1 < 5, W_3 < W_1, W_3 > W_4 + 2\})$,
5. $P(\{0 < W_2 < 2W_1)$,
6. $P(\{W_4 > 2W_3\}|\{W_3 > 0\})$.

Wynik podaj w postaci liczbowej lub z użyciem dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego.

Zadanie 21. *Niech a i b będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, zaś $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ dowolnym podziałem odcinka $[a,b]$ tzn. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, Δ średnicą tego podziału tzn. $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(t_{i+1} - t_i)$. Udowodnij, że*

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2\right) = b - a$$

$$E\left(\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2 - (b-a)\right]^2\right) \leqslant 2(b-a)\Delta.$$

Zadanie 22. *Niech a i b będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ dowolnym podziałem odcinka $[a,b]$, zaś $\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha t_{i+1} + (1-\alpha)t_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$, gdzie $\alpha \in [0,1]$. Udowodnij, że*

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} W_{\tau_i}\left[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right] &= \frac{1}{2}W^2(b) - \frac{1}{2}W^2(a) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}]^2 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1}[W_{\tau_i} - W_{t_i}]^2 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1}[W_{t_{i+1}} - W_{\tau_i}][W_{\tau_i} - W_{t_i}].\end{aligned}$$

Zadanie 23. *Niech a i b będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ dowolnym podziałem odcinka $[a,b]$, zaś $\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha t_{i+1} + (1-\alpha)t_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$, gdzie $\alpha \in [0,1]$. Udowodnij, że*

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1}[W_{\tau_i} - W_{t_i}]^2\right) = \alpha(b-a)$$

$$E\left(\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(W_{\tau_i} - W_{t_i}\right)^2 - \alpha(b-a)\right]^2\right) \leqslant 2\alpha(b-a)\Delta,$$

gdzie Δ jest średnicą tego podziału.

Zadanie 24. *Niech a i b będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$, $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ dowolnym podziałem odcinka $[a,b]$ tzn. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, zaś $\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha t_{i+1} + (1-\alpha)t_i$ dla $i = 0, 1, \dots, n-1$, gdzie $\alpha \in [0,1]$. Udowodnij, że*

$$E\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\left[W_{\tau_i} - W_{t_i}\right]\left[W_{t_{i+1}} - W_{\tau_i}\right]\Big) = 0,$$

$$E\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left[W_{\tau_i} - W_{t_i}\right]\left[W_{t_{i+1}} - W_{\tau_i}\right]\right)^2\right) \leqslant \alpha(1-\alpha)\Delta(b-a),$$

gdzie Δ jest średnicą tego podziału.

Zadanie 25. *Sprawdzić, czy $2W_t - W_s$ oraz $W_t - 2W_s$ są niezależne od $W_s - W_r$, gdzie $0 \leqslant r < s < t$, a $(W_t)_{t\geqslant 0}$ jest standardowym procesem Wienera.*

Zadanie 26. *Znajdź rozkład zmiennej $5W_1 - W_3 + W_7$.*

Zadanie 27. *Dla jakich parametrów a i b, zmienne $aW_1 - W_2$ oraz $W_3 + bW_5$ są niezależne?*

Uzupełnienie wykładu

Zadanie 28 (Nierówność Hoffmanna-Jørgensena). *Udowodnij, że jeżeli* $X_1, \ldots, X_n$ *są niezależnymi zmiennymi losowymi oraz* $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ *dla dowolnego* $k \in \overline{1,n}$*, to dla wszystkich nieujemnych liczb rzeczywistych* s, t, r *mamy*

$$\begin{aligned} P(\{\max_{k\leqslant n}|S_k| > s+t+r\}) &\leqslant P(\{\max_{k\leqslant n}|X_k| > s\}) + P(\{\max_{k\leqslant n}|S_k| > t\}) \cdot P(\{\max_{i,j\leqslant n}|S_i - S_j| > r\}) \\ &\leqslant P(\{\max_{k\leqslant n}|X_k| > s\}) + 2P(\{\max_{k\leqslant n}|S_k| > t\}) \cdot P(\{\max_{k\leqslant n}|S_n - S_k| > \frac{r}{2}\}). \end{aligned}$$