

Lista 6
Procesy stochastyczne
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

2015/2016

Zadanie 1. Udowodnić fakty podane na wykładach.

Uwaga 1. O ile nie jest powiedziane inaczej rozważamy proces Wienera względem ustalonej filtracji.

Zadanie 2. Udowodnij, że całka z funkcji schodkowej (tj. $I(\cdot)$) jest niezależna od reprezentacji tej funkcji.

Zadanie 3. Niech h, h_1, h_2 będą funkcjami schodkowymi. Udowodnij, że

1. $E[I(h)] = 0$,

2. $D^2(I(h)) = E[I(h)^2] = \int_0^t h^2(s) ds$,

3. $I(h)$ ma rozkład normalny $\mathcal{N}\left(0, \sqrt{\int_0^t h^2(s) ds}\right)$,

4. $I(c_1 h_1 + c_2 h_2) = c_1 I(h_1) + c_2 I(h_2)$ dla $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4 (Praca domowa). Udowodnij, że jeżeli $h \in C^1([0, t])$, to

$$\int_0^t h(s) dW_s = h(t)W_t - \int_0^t h'(s)W_s ds.$$

Zadanie 5. Udowodnić, że całka z procesu elementarnego jest

1. niezależna od reprezentacji tego procesu,

2. martyngałem.

Zadanie 6. Niech X będzie procesem elementarnym. Udowodnij, że

$$E\left(\left|\int_0^T X_s dW_s\right|^2\right) = E\left(\int_0^T X_s^2 ds\right).$$

Zadanie 7. Obliczyć z definicji całki Itô:

1. $\int_0^T dW_t = W_T$,

2. $\int_a^b dW_t = W_b - W_a$,

3. $\int_0^T W_t dW_t = \frac{1}{2}W_T^2 - \frac{T}{2}$,

$$4. \int_0^T t dW_t = TW_T - \int_0^T W_t dt,$$

$$5. \int_0^T W_t^2 dW_t = \frac{1}{3}W_T^3 - \int_0^T W_t dt.$$

Zadanie 8. Udowodnij, że $E \left(\int_0^T W_t dt \right) = 0$.

Zadanie 9 (Praca domowa). Udowodnij, że rodzina

$$\mathcal{A} := \{\Gamma \in \mathcal{P} : I_\Gamma \in \overline{\mathcal{E}}\}$$

jest λ -układem.