

Lista 7  
Procesy stochastyczne  
kierunek: matematyka, studia II°  
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

2015/2016

**Zadanie 1.** Udowodnić fakty podane na wykładach.

**Uwaga 1.** O ile nie jest powiedziane inaczej rozważamy proces Wienera względem ustalonej filtracji.

**Zadanie 2.** Udowodnij, że  $E\left(\int_0^T W_t dt\right) = 0$ .

**Zadanie 3.** Korzystając z twierdzenia:  $E\left(\int_0^T f(t, W_t) dt\right) = \int_0^T E(f(t, W_t)) dt$  oblicz wartości oczekiwane całek

$$\begin{aligned} a) & E\left(\int_0^T W_t dW_t\right) & b) & E\left(\int_0^T t dW_t\right) \\ c) & E\left(\int_0^T W_t^2 dW_t\right) & d) & E\left(\int_0^T W_t^4 dW_t\right). \end{aligned}$$

**Zadanie 4.** Wyprowadź formułę Itô dla procesu Wienera

$$dF(t, W_t) = \left(\partial_1 F + \frac{1}{2}\partial_{2,2}F\right) dt + \partial_2 F dW_t.$$

**Zadanie 5.** Korzystając z formuły Itô oblicz następujące różniczki:

1.  $d(W_t^2)$ ,
2.  $d(tW_t)$ ,
3.  $d(tW_t^2)$ ,
4.  $d(W_t^3)$ ,
5.  $d(W_t^k)$ ,
6.  $d(\exp(\alpha W_t))$ ,
7.  $d\left(\frac{W_t}{t+1}\right)$ ,
8.  $d(\cos W_t)$ ,
9.  $d(\sin W_t)$ .

**Zadanie 6.** Korzystając z formuły Itô dla procesu Wienera wyprowadź wzór na całkowanie przez części

$$\int_0^T \partial_2 F(t, W_t) dW_t = F(T, W_T) - F(0, W_0) - \int_0^T \left(\partial_1 F(t, W_t) + \frac{1}{2}\partial_{2,2}F(t, W_t)\right) dt.$$

**Zadanie 7.** Oblicz wartości oczekiwane całek:

1.  $E \left( \int_0^T t^2 dW_t \right),$

2.  $E \left( \int_0^T f(t) dW_t \right).$