

Ćwiczenia drugie*
Probabilistyka – lista 1
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

9 października 2015r.

1 Gęstość i dystrybuanta rozkładu wielowymiarowego

Zadanie 1. Czy można dobrać stałą c tak, aby funkcja

$$\bullet f(x, y) = \begin{cases} cxy + x + y & \text{dla } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów} \end{cases}$$
$$\bullet f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{dla } 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów} \end{cases}$$

była gęstością rozkładu dwuwymiarowego. Jeśli tak, to dla tak obliczonej stałej policzyć dystrybuantę tego rozkładu.

Zadanie 2. Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa układu trzech zmiennych losowych (X, Y, Z) mając daną dystrybuantę

$$F(x, y, z) = \begin{cases} (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by})(1 - e^{-cz}) & \text{dla } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych.} \end{cases}$$

Zadanie 3. Czy można dobrać parametr c tak, aby podane funkcja była gęstością pewnego rozkładu zmiennej losowej.

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy + x & \text{dla } x \in \langle 0, 2 \rangle \wedge y \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Zadanie 4. Niech

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \vee y < 0 \\ y - y \exp(-3x) & \text{dla } x > 0, 0 < y < 1 \\ 1 - \exp(-3x) & \text{dla } x > 0, y > 1 \end{cases}$$

będzie dystrybuantą dwuwymiarowego rozkładu. Wyznaczyć gęstość tego rozkładu.

Zadanie 5. Niech

$$g(x, y) = \begin{cases} \exp(-\pi x) & \text{dla } x > 0, y \in [0, \pi] \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}$$

będzie gęstością dwuwymiarowego rozkładu. Znaleźć dystrybuantę tego rozkładu.

*©J.Kotowicz

Zadanie 6. Niech $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$ będzie gęstością prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) . Wyznaczyć dystrybuantę (X, Y) .

Zadanie 7. Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) mając jej dystrybuantę

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - e^{-3x} - e^{-4y} + e^{-3x-4y} & \text{dla } x, y > 0 \\ 0 & \text{przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

2 Rozkłady wielowymiarowe (dyskretne)

Zadanie 8. Doświadczenia niezależne przerywane są, gdy zdarzenie losowe A zostanie zaobserwowane po raz drugi. Niech zmienna losowa X_1 oznacza numer doświadczenia, gdy A pojawi się pierwszy raz, X_2 numer doświadczenia, gdy A pojawi się drugi raz. Wyznaczyć rozkład układu (X_1, X_2) .

Zadanie 9. Spośród N ponumerowanych elementów losowanych jest n elementów (schemat losowania ze zwracaniem). Zmienne losowe X_1, X_2 są określone następująco:

- X_1 - wartość najmniejszego wylosowanego numeru,
- X_2 - wartość największego wylosowanego numeru.

Wyznaczyć rozkład układu (X_1, X_2) oraz $E(X_1 X_2)$.

Zadanie 10. Rzucamy dwukrotnie kostką. Wartość pierwszej współrzędnej jest równa wartości bezwzględnej różnicy oczek w obu rzutach, a wartość drugiej współrzędnej jest równa iloczynowi oczek, które wypadły w obu rzutach. Znaleźć rozkład tak określonej dwuwymiarowej zmiennej losowej.

3 Rozkłady brzegowe i momenty

Zadanie 11. Policzyc dla gęstości z zadania 1 rozkłady brzegowe.

Zadanie 12. Wyznaczyć dystrybuanty oraz rozkłady brzegowe następującego rozkładu dwuwymiarowego

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów.} \end{cases}$$

Zadanie 13. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład równomierny na kwadracie $(0, 2)^2$. Obliczyć rozkłady brzegowe.

Zadanie 14. Dana jest dwuwymiarowa gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{9}xy & \text{dla } x, y \in (1, 2) \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}$$

Obliczyć moment rzędu 2

- $(2, 0)$;
- $(1, 1)$.

Zadanie 15. Wyznaczyć stałą c , tak aby funkcja $f(x, y) = c \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2))$ była gęstością. Obliczyć momenty zwykłe rzędu 2.

Zadanie 16. (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$. Obliczyć wszystkie momenty zwykłe i centralne rzędu 2.

Zadanie 17. Policzyc dla gęstości z zadania 3

- rozkłady brzegowe;

- momenty zwykłe i centralne rzędu pierwszego i drugiego.

Zadanie 18. Znaleźć rozkłady brzegowe zmiennych losowych X, Y znając gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/16 & \text{dla } |x| < 2, |y| < 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}$$

Zadanie 19. Znaleźć gęstości rozkładów brzegowych zmiennych losowych X i Y , mając gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 \exp(-x - 2y) & \text{dla } x, y > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}$$

Zadanie 20. Znaleźć rozkłady brzegowe zmiennych losowych X, Y mając rozkład zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) opisany tabelką

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	0,05	0,23	0,20	0,12
y_2	0,20	0,08	0,10	0,02

Zadanie 21. Na \mathbb{R}^2 określamy rozkład: $P(-1, 0) = 0,1$, $P(-1, 1) = 0,2$, $P(0, 0) = 0,2$, $P(0, 1) = 0,3$, $P(1, 1) = 0,2$. Czy P jest iloczynem swoich rozkładów brzegowych?

4 Wielowymiarowy rozkład normalny

Zadanie 22. Dana jest macierz kowariancji układu zmiennych losowych normalnych (X, Y, Z)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Podać wzór na gęstość prawdopodobieństwa jeśli $E(X) = E(Y) = E(Z) = 0$.

Zadanie 23. Wiedząc, że układ zmiennych losowych o rozkładzie normalnym ma brzegowe wartości oczekiwane równe zero oraz macierz kowariancji równą

- $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

- $M = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

wyznaczyć jego gęstość.

Zadanie 24. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{8}(2x^2 + 4y^2 - 2y(z + 5) + (z + 5)^2) \right].$$

Zbudować macierz kowariancji.

Zadanie 25. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x, y) = c \exp \left[-(4(x - 5)^2 + 2(x - 5)(y - 3) + 5(y - 3)^2) \right].$$

Wyznaczyć c , a następnie zbudować macierz kowariancji.

Zadanie 26. Trójwymiarowa zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład o gęstości

- $f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{6\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{12} [6x^2 + (4(y - 1)^2 + (z + 2)^2 - 2(y - 1)(z + 2))] \right\},$

- $f(x, y, z) = c \exp \left\{ -\frac{1}{2} [2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz + 4xz] \right\},$

Wyznaczyć macierz kowariancji (w przykładzie drugim wyznaczyć wcześniej stałą c).