

Ćwiczenia piąte*
Probabilistyka – lista 3
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

30 października 2015r.

Zadanie 1. Niech $X = I_A$ będzie zmienną losową na (Ω, Σ, P) , niech też $B \in \Sigma$. Oznaczmy $G = \sigma(\{B\})$. Wyznacz $E(X|G)$.

Zadanie 2. Niech rozkład wektora $(X; Y)$ będzie dany tabelką:

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	1/4	1/4	0
1	0	1/4	1/4

Jaka jest $E(X|\sigma(Y))$?

Zadanie 3. Niech $\Omega = [0, 1]$, $\Sigma = \mathcal{B}(\Omega)$, a P miara Lebesgue'a na Ω . Wyznacz $E(f|\mathcal{F})$, gdzie

1. $f(x) = \sqrt{x}$ i \mathcal{F} jest σ -ciałem generowanym przez zbiory $[0, 0.25]$, $[0.25, 1]$,
2. $f(x) = -x$ i \mathcal{F} jest σ -ciałem generowanym przez zbiory $[0, 0.5]$, $[\frac{1}{3}, 1]$,

Zadanie 4. Niech X będzie liczbą orłów otrzymanych w dwukrotnym rzucie symetryczną monetą, a A zdarzeniem polegającym na wyrzuceniu w pierwszym rzucie orła. Oblicz $E(X|A)$.

Zadanie 5. Udowodnij, że jeżeli $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ stanowi rozbitcie przestrzeni Ω , to

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X|A_i)P(A_i).$$

Zadanie 6 (Praca domowa). Niech X_1, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie dwupunktowym takim, że dla ustalonego $p \in]0, 1[$

$$P(\{X_i = 1\}) = 1 - P(\{X_i = 0\}) = p \text{ dla } i \in \overline{1, n}$$

Niech też $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Udowodnij, że

$$E(X_1|S_n = k) = \frac{k}{n} \text{ dla } k \in \overline{0, n}$$

Zadanie 7. Dodatkowo zadania z list 3 i 4 dr U. Ostaszewskiej z tego roku akademickiego oraz listy 5 z roku 2010/2011.

*©J.Kotowicz