

Ćwiczenia dziesiąte
Probabilistyka – lista 7
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

11 grudnia 2015r.

Zadanie 1. Policz funkcje charakterystyczne rozkładów:

- rozkładu jednostajnego na odcinku $] - 1, 1[$;
- rozkładu jednostajnego na $[a, b]$;
- rozkład trójkątny równoramienny na odcinku $[-1, 1]$;
- rozkładu wykładniczego;
- rozkładu Bernoulliego;
- rozkładu Poissona;
- rozkładu dwupunktowego, gdzie $P(\{X = 1\}) = p = 1 - P(\{X = 0\})$ i $p \in]0, 1[$;
- rozkładu $N(0, 1)$ (**Praca domowa**);
- rozkładu $N(m, \sigma)$;
- rozkładu zadanego wzorem $P(\{X = k\}) = (1 - p)p^k$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $p \in]0, 1[$;
- rozkładu zmiennej losowej X , którego gęstość zadana jest wzorem $f(x) = \frac{1}{2} \exp(-|x|)$;
- zmiennej losowej, która przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych oczek kostką do gry.

Zadanie 2. Oblicz momenty zmiennej losowej X z zadania poprzedniego.

Zadanie 3. Sprawdź, że funkcja charakterystyczna φ rozkładu zmiennej losowej posiada własności:

a) $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = 1$,

b) dla dowolnych liczb zespolonych z_1, \dots, z_n oraz dowolnych $t_1, \dots, t_n, 1 \leq n$, spełniona jest nierówność

$$\sum_{k,l=1}^n \varphi(t_k - t_l) z_k \bar{z}_l \geq 0$$

c) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

Zadanie 4. Czy funkcja

- $f(t) = \exp(-|t|)$,
- $\phi(t) = \frac{1}{1+i|t|}$.

może być funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu?

Zadanie 5. Wiedząc, że funkcja ϕ jest funkcją charakterystyczną udowodnij, że funkcja sprzężona jest również funkcją charakterystyczną.

Zadanie 6. Niech φ będzie funkcją charakterystyczną rozkładu zmiennej losowej X . Czy $|\varphi|$ jest również funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu?

Zadanie 7. Mając daną funkcję charakterystyczną znajdź rozkład zmiennej losowej:

- $\phi(t) = \frac{1}{4}(\exp(-it) + \exp(it))^2$
- $\phi(t) = \cos(t)$
- $\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt)$, gdzie $a_k > 0$ i $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$;
- $\phi(t) = (1 + t^2)^{-1}$.

Zadanie 8. Oblicz momenty zmiennej losowej X z ostatniego przykładu zadania 7.

Zadanie 9. Korzystając z funkcji charakterystycznej policz

- wartość oczekiwaną dla rozkładu Poissona;
- k -ty moment zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ ;
- k -ty moment zmiennej losowej o rozkładzie Poissona.

Zadanie 10. Danych jest n niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach równomiernych na odcinku $[-1, 1]$. Oblicz funkcję charakterystyczną zmiennej losowej będącej sumą danych zmiennych.

Zadanie 11. Wyznacz funkcję charakterystyczną sumy niezależnych zmiennych losowych.

Zadanie 12. Przedstaw funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $Y = aX + b$ w zależności od funkcji charakterystycznej zmiennej losowej X .

Zadanie 13. Niech φ będzie funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej. Czy funkcja φ^{2015} jest funkcją charakterystyczną? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi twierdzącej wskaż zmienną losową, której może to być funkcja charakterystyczna.

Zadanie 14. Niech φ będzie funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej. Czy funkcja $|\varphi|^2$ jest funkcją charakterystyczną? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi twierdzącej wskaż zmienną losową, której może to być funkcja charakterystyczna.