Ćwiczenia dwunaste
Probabilistyka – lista 8
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

18 grudnia 2015r.

Zadanie 1. *Wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu wykładniczego z parametrem λ. Na jej podstawie, korzystając z własności funkcji charakterystycznej, wyznacz wariancję zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym.*

Zadanie 2. *Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrami odpowiednio $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Korzystając z własności funkcji charakterystycznych pokaż, że zmienna losowa $Y = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład Poissona.*

Zadanie 3. *Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych standaryzowanych. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Z = X - Y$.*

Zadanie 4. *Niech zmienna X ma rozkład normalny standaryzowany. Wyznacz funkcję charakterystyczną zmiennej X^2.*

Zadanie 5. *Korzystając z poprzedniego zdania wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu $\chi^2(n)$.*

Zadanie 6. *Udowodnij, że jeżeli φ_1 i φ_2 są funkcjami charakterystycznymi, to $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ jest też funkcja charakterystyczną.*

Zadanie 7. *Uogólnij zadanie 6 na kombinację liniową, ściśle wypukłą skończonej ilości funkcji charakterystycznych.*

Zadanie 8. *Niech X_1, X_2 będą zmiennymi niezależnymi o rozkładzie Cauchy'ego z parametrem a, tzn. o gęstości $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$. Wiedząc, że funkcja charakterystyczna rozkładu Cauchy'ego z parametrem a jest postaci $\varphi(t) = \exp(-a|t|)$, pokaż, że $X_1 + X_2$ też ma rozkład Cauchy'ego. Wyznacz ten parametr.*

Zadanie 9. *Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i maja rozkład Cauchy'ego z parametrem $a = 1$. Wykaż, że $X = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ ma również rozkład Cauchy'ego.*

Zadanie 10. *Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X ma rozkład jednostajny na odcinku $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, natomiast Y ma rozkład zadany równościami:*

$$P\left(\left\{Y = 1 + \frac{1}{n}\right\}\right) = P\left(\left\{Y = -1 + \frac{1}{n}\right\}\right) = \frac{1}{2},$$

gdzie n jest ustaloną liczba naturalną. Zmienna Z określona jest wzorem $Z = 2X + Y$. Wyznacz funkcję charakterystyczną zmiennej Z.

Zadanie 11. *Rozkład dwuwymiarowej zmienne losowej (X, Y) zadany jest gęstością*

$$f(x, y) = \frac{1}{4}(1 + xy(x^2 - y^2))I_{\{(x,y):|x|\leqslant 1 \wedge |y|\leqslant 1\}}.$$

Wykaż, że zmienne losowe X i Y są zależne, a mimo to $\varphi_{X+Y} = \varphi_X\varphi_Y$.

Zadanie 12. *Udowodnij, że jeżeli* $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{D} Y$ *oraz dla dowolnego* n *zmienne* X_n *i* Y_n *są niezależne oraz zmienne* X *i* Y *są niezależne, to* $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + Y$.

Zadanie 13. *Udowodnij, że jeżeli zmienna losowa* X *przyjmuje wartości całkowite, to*

$$\forall_{k\in\mathbb{Z}} \quad P(\{X = k\}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi_X(t) dt.$$

Zadanie 14. *Wiedząc, że* $\varphi(t) = \frac{1}{2-\exp(it)}$ *jest funkcją charakterystyczna rozkładu dyskretnego, którego zbiorem wartości jest zbiór liczb całkowitych nieujemnych, wyznacz ten rozkład.*