Ćwiczenia trzynaste
Probabilistyka – lista 9
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

15 stycznia 2016r.

Zadanie 1. *W pewnym towarzystwie ubezpieczeniowym jest ubezpieczonych 10000 samochodów. Każdy z właścicieli płaci roczna składkę 30 PLN za samochód. Średnio 6 na 1000 samochodów ulega uszkodzeniu w ciągu roku. Właścicielowi uszkodzonego pojazdu towarzystwo wypłaca 2500 zł. Na podstawie twierdzenia Moivre'a–Laplace'a oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu roku*

1. *towarzystwo nie poniesie strat,*
2. *zysk przekroczy 125000 zł?*

Zadanie 2. *Pewna konstrukcja składa się ze 100 jednakowych elementów. Na podstawie CTG Lindeberga-Lévy'ego oszacować prawdopodobieństwo, że całkowita masa tej konstrukcji nie przekroczy 335 kg, jeśli rozkład masy elementów, z których jest złożona, ma wartość oczekiwana 3,3 kg, a odchylenie standardowe 0,1 kg?*

Zadanie 3. *Czas oczekiwania na tramwaj linii 4 jest zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym o średniej 15 minut. Pan A codziennie w dni robocze dojeżdża nim do pracy. Oszacować na podstawie CTG Lindeberga-Lévy'ego prawdopodobieństwo, ze pan A traci kwartalnie (czyli w ciągu 65 kolejnych dni roboczych) na czekanie na tramwaj linii 4 nie więcej niż 1000 minut.*

Zadanie 4. *Partia towaru ma wadliwość 7%. Pobrano próbkę 800 elementową. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ilość sztuk wadliwych w tej próbie jest zawarta w granicach 6% - 9%.*

Zadanie 5. *Strzelamy 300 razy, przy czym prawdopodobieństwo za każdym razem trafienia do celu wynosi 0,25. Określić prawdopodobieństwo, że liczba celnych strzałów będzie się różnic o nie więcej niż 0,1 od*

- *ogólnej liczby strzałów.*
- *najbardziej prawdopodobnej liczby celnych strzałów.*

Zadanie 6. *Przeprowadzono* 60 *jednakowych prób, w których mogło zajść zdarzenie A. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenie w pojedynczej próbie wynosi* 0,6. *Obliczyć prawdopodobieństwo, że zdarzenie nie pojawi się w większości prób.*

Zadanie 7. *W 10 000 rzutów monetą orzeł wypadł 5400 razy. Uzasadnij przypuszczenie, że moneta jest niesymetryczna.*

Zadanie 8. *Korzystając z prawa wielkich liczb Moivre'a-Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że w 720 rzutach kostką ilość szóstek będzie*

- *zawierać się pomiędzy 121 a 140,*
- *mniejsza niż 125,*
- *większa niż 110.*

Zadanie 9. *Rzucamy 1000 razy kostką. Niech zmienna losowa S oznacza sumę wyrzuconych oczek. Na podstawie twierdzenia Lindeberga*

- *ocenić $P(\{3450 \leqslant S \leqslant 3550\})$,*
- *znaleźć takie N, M jak najmniej różniące się od siebie, aby $P(\{M \leqslant S \leqslant N\}) > 0{,}99$.*

Zadanie 10. *Dodano do siebie 10000 liczb, każda dana z dokładnością 10^{-m}. Błędy zaokrągleń są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[-\frac{1}{2} \cdot 10^{-m}, \frac{1}{2} \cdot 10^{-m}]$. Znaleźć granice w których będzie się zawierał łączny błąd z prawdopodobieństwem większym niż $0{,}997$.*

Zadanie 11. *Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia w jednym doświadczeniu wynosi 0,3. Z jakim prawdopodobieństwem można twierdzić, że częstość tego zdarzenia przy 100 doświadczeniach będzie zawarta w granicach od 0,2 do 0,4?*

Zadanie 12. *Mamy 100 obrabiarek pracujących niezależnie od siebie, o tej samej mocy i tym samym sposobie pracy. Każda z nich jest włączana w ciągu 0,8 całego czasu pracy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dowolnie wybranej chwili będzie włączanych od 70 do 86 obrabiarek?*

Zadanie 13. *Prawdopodobieństwo, że w ciągu czasu T przestanie działać jeden kondensator jest równe 0,2. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że spośród 100 kondensatorów w ciągu czasu T przestanie działać*

- *nie mniej niż 20 kondensatorów,*
- *mniej niż 20 kondensatorów,*
- *od 14 do 26 kondensatorów.*

Zadanie 14. *Wykazać, że ciąg $(X_n)_{n \geqslant 1}$ zmiennych losowych niezależnych o takim samym rozkładzie i skończonej wariancji spełnia centralne twierdzenie graniczne (CTG).*

Zadanie 15. *Dane jest ciąg $(X_n)_{n \geqslant 1}$ zmiennych losowych niezależnych, przy czym*

1. $P(\{X_n = \frac{1}{n^\alpha}\}) = P(\{X_n = -\frac{1}{n^\alpha}\}) = p,$
2. $P(\{X_n = 0\}) = 1 - 2p, 0 < p < \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\alpha \leqslant \frac{1}{2},$
3. $P(\{Y_n = \sqrt{n}\}) = P(\{X_n = -\sqrt{n}\}) = \frac{1}{2}.$

Dowieść, że każdy z tych ciągów spełnia CTG.

Zadanie 16. *Niech $(X_n)_{n \geqslant 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że zmienna X_n przyjmuje wartości 2^n, -2^n i 0 z prawdopodobieństwem równym odpowiednio $2^{-(2n+1)}$, $2^{-(2n+1)}$ i $1 - 2^{-2n}$. Czy dla tego ciągu spełniony jest warunek Lapunowa?*

Zadanie 17. *Niech $\alpha \in]0, 1[$ i niech $(X_n)_{n \geqslant 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $P(\{X_n = \pm n^\alpha\}) = \frac{1}{2n^\alpha}$ i $P(\{X_n = 0\}) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$. Dowieść, że ciąg ten spełnia warunek Lapunowa.*

Zadanie 18. *Niech $\alpha \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$, $p \in]0, \frac{1}{2}[$ i niech $(X_n)_{n \geqslant 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $P(\{X_n = \pm\frac{1}{n^\alpha}\}) = p$ i $P(\{X_n = 0\}) = 1 - 2p$. Dowieść, że ciąg ten spełnia warunek Lapunowa.*

Zadanie 19. *Niech $\alpha \in \mathbb{R}_+$ i niech $(X_n)_{n \geqslant 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $P(\{X_n = \pm n\alpha\}) = 0{,}25$ i $P(\{X_n = 0\}) = 0{,}5$. Dowieść, że ciąg ten spełnia warunek Lindeberga.*