

## Ćwiczenia 4 – 2015.10.22

**Zadanie 1** Niech instrument bazowy nie przynosi dochodu w trakcie trwania życia opcji europejskiej. Przy założeniu, że  $C_0^e - P_0^e - S_0 + e^{-rT}K > 0$  pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja długa na opcji sprzedaży,
- pozycja długa na instrumencie bazowym,
- pozycja krótka na opcji kupna,
- pożyczka kwoty  $e^{-rT}K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,
- lokata kwoty  $C_0^e - P_0^e - S_0 + e^{-rT}K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

**Zadanie 2** Niech instrument bazowy nie przynosi dochodu w trakcie trwania życia opcji europejskiej. Przy założeniu, że  $C_0^e - P_0^e - S_0 + e^{-rT}K < 0$  pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja krótka na opcji sprzedaży,
- krótka sprzedaż instrumentu bazowym,
- pozycja długa na opcji kupna,
- lokata kwoty  $e^{-rT}K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,
- lokata kwoty  $-C_0^e + P_0^e + S_0 - e^{-rT}K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

**Zadanie 3** W oparciu o zadania 1 i 2 sformułuj parytet kupna-sprzedaży dla opcji europejskich na instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji nie przynosi dochodu.

**Zadanie 4** Niech instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji przynosi dochody  $C(t_i)$ , gdzie  $i \in \overline{1, n}$ , płatne w ustalonych chwilach czasu  $0 < t_1 < \dots < t_n < T$ . Przy założeniu, że  $C_0^e - P_0^e - S_0 + D_0 + e^{-rT}K > 0$ , gdzie  $D_0 = \sum_{i=1}^n e^{-rt_i} C(t_i)$ , pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja długa na opcji sprzedaży,
- pozycja długa na instrumencie bazowym,
- pozycja krótka na opcji kupna,
- pożyczka kwoty  $e^{-rT}K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,
- pożyczka kwoty  $e^{-rt_i} C(t_i)$  na okres kończący się w chwili  $t_i$  po wolnej od ryzyka stopie procentowej, gdzie  $i \in \overline{1, n}$ ,
- lokata kwoty  $C_0^e - P_0^e - S_0 + D_0 + e^{-rT}K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

**Zadanie 5** Niech instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji przynosi dochody  $C(t_i)$ , gdzie  $i \in \overline{1, n}$ , płatne w ustalonych chwilach czasu  $0 < t_1 < \dots < t_n < T$ . Przy założeniu, że  $C_0^e - P_0^e - S_0 + D_0 + e^{-rT}K < 0$ , gdzie  $D_0 = \sum_{i=1}^n e^{-rt_i} C(t_i)$ , pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja krótka na opcji sprzedaży,
- krótka sprzedaż instrumentu bazowym,
- pozycja długa na opcji kupna,
- lokata kwoty  $e^{-rT}K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,
- lokata kwoty  $e^{-rt_i}C(t_i)$  na okres kończący się w chwili  $t_i$  po wolnej od ryzyka stopie procentowej, gdzie  $i \in \overline{1, n}$ ,
- lokata kwoty  $-C_0^e + P_0^e + S_0 - D_0 - e^{-rT}K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

**Zadanie 6** W oparciu o zadania 4 i 5 sformułuj parytet kupna-sprzedaży dla opcji europejskich na instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji przynosi dochody  $C(t_i)$ , gdzie  $i \in \overline{1, n}$ , płatne w ustalonych chwilach czasu  $0 < t_1 < \dots < t_n < T$ .

**Zadanie 7** Niech instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji amerykańskiej nie przynosi dochodu. Przy założeniu, że  $C_0^a - P_0^a - S_0 + e^{-rT}K > 0$  pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja długa na opcji sprzedaży,
- pozycja długa na instrumencie bazowym,
- pozycja krótka na opcji kupna,
- pożyczka kwoty  $e^{-rT}K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,
- lokata kwoty  $C_0^a - P_0^a - S_0 + e^{-rT}K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

**Zadanie 8** Niech instrument bazowy, który w trakcie trwania opcji amerykańskiej nie przynosi dochodu. Przy założeniu, że  $C_0^a - P_0^a - S_0 + K < 0$  pokaż, że strategia o następujących elementach

- pozycja krótka na opcji sprzedaży,
- krótka sprzedaż instrumentu bazowym,
- pozycja długa na opcji kupna,
- lokata kwoty  $K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej,
- lokata kwoty  $-C_0^a + P_0^a + S_0 - K$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

**Zadanie 9** Rozpatrzmy europejskie opcje kupna i sprzedaży na ten sam instrument bazowy o ustalonych: czasie trwania  $T$ , cenie gotówkowej instrumentu bazowego  $S_t$  i wolnej od ryzyka stopie procentowej  $r$  oraz nie przynoszący dochodu w trakcie trwania opcji. Niech  $C^e(K)$  (odpowiednio  $P^e(K)$ ) oznacza cenę opcji kupna (odpowiednio sprzedaży) z ceną wykonania  $K$  przy stałych pozostałych parametrach. Rozważmy funkcje  $K \mapsto C^e(K)$  i  $K \mapsto P^e(K)$ .

1. Przy założeniach, że  $K_1 < K_2$  oraz  $C^e(K_1) \leq C^e(K_2)$  udowodnij, że strategia

- pozycja długa na opcji kupna z ceną wykonania  $K_1$ ,
- pozycja krótka na opcji kupna z ceną wykonania  $K_2$ ,
- lokata kwoty  $C^e(K_2) - C^e(K_1)$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

2. Przy założeniach, że  $K_1 < K_2$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $K = \alpha K_1 + (1 - \alpha)K_2$  oraz  $\alpha C^e(K_1) + (1 - \alpha)C^e(K_2) < C^e(K)$  udowodnij, że strategia

- pozycja krótka na 1 opcji kupna z ceną wykonania  $K$ ,
- pozycja długa na  $\alpha$  sztuk opcji kupna z ceną wykonania  $K_1$ ,
- pozycja długa na  $(1 - \alpha)$  sztuk opcji kupna z ceną wykonania  $K_2$ ,
- lokata kwoty  $C^e(K) - \alpha C^e(K_1) - (1 - \alpha)C^e(K_2)$  na czas trwania opcji po wolnej od ryzyka stopie procentowej

jest strategią arbitrażową.

3. Wskaż strategię arbitrażową jeżeli  $K_1 < K_2$  oraz  $P^e(K_1) \geq P^e(K_2)$  (Wskazówka: strategia analogiczna do punktu 1).

4. Wskaż strategię arbitrażową jeżeli  $K_1 < K_2$ ,  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $K = \alpha K_1 + (1 - \alpha)K_2$  oraz  $\alpha P^e(K_1) + (1 - \alpha)P^e(K_2) < P^e(K)$  (Wskazówka: strategia analogiczna do punktu 2).

5. W oparciu o punkt 1 i 2 udowodnij, że funkcja  $K \mapsto C^e(K)$  jest malejącą i wypukłą.

6. W oparciu o punkt 3 i 4 udowodnij, że funkcja  $K \mapsto P^e(K)$  jest rosnącą i wypukłą.

7. W oparciu o paritet kupna-sprzedazy udowodnij, że funkcje  $K \mapsto C^e(K)$  i  $K \mapsto P^e(K)$  spełniają warunek Lipschitza ze stałą  $e^{-rT}$ .

**Zadanie 10** Przedstaw rozwiązanie zmodyfikowanego zadania 9 dla opcji europejskich, które w trakcie ich trwania przynoszą dochody  $C(t_i)$ , gdzie  $i \in \overline{1, n}$ , płatne w ustalonych chwilach czasu  $0 < t_1 < \dots < t_n < T$  oraz takich, które przynoszą dochód płatny w sposób ciągły ze stopą  $q$ .