

Ćwiczenia 8 i 9 – 2015.11.19 i 2015.11.26

Uwaga 1 Rozważamy model rynku skończonego.

Zadanie 1 Udowodnij, że w modelu rynku istnieje możliwość arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje strategia samofinansująca się φ taka, że

$$P(\{V_T^*(\varphi) \geq V_0(\varphi)\}) = 1 \quad \text{oraz} \quad P(\{V_T^*(\varphi) > V_0(\varphi)\}) > 0.$$

Zadanie 2 Udowodnij, że jeżeli istnieje strategia samofinansująca się φ taka, że $V_0(\varphi) < 0$ i $V_T(\varphi) \geq 0$, to istnieje na rynku strategia arbitrażowa.

Zadanie 3 (Zadanie z wykładu) Udowodnij, że zbiór wypłat osiągalnych jest przestrzenią wektorową.

Zadanie 4 Rozważmy rynek jednookresowy z jednym instrumentem ryzykownym o własności

| | | | |
|-------|------------|------------|------------|
| S_0 | S_1 | | |
| | ω_1 | ω_2 | ω_3 |
| 25 | 20 | 40 | 35 |

Investor uważa, że każdy stan świata jest jednakowo prawdopodobny. Wolna od ryzyka stopa procentowa wznosi 20%. Czy wszystkie wypłaty są na tym rynku osiągalne?

Zadanie 5 (Prawo jednej ceny) Udowodnij, że w modelu rynku bez możliwości arbitrażu strategie inwestycyjne mające tę samą wartość w chwili końcowej mają tę samą wartość w chwili początkowej.

Zadanie 6 Wyznaczyć w modelu jednookresowym, o ile istnieją, miarę martyngałową oraz liniową miarę wyceny, przy następujących danych

1.

| n | $S_n^*(0)$ | $S_n^*(1)$ | | | |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| | | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 |
| 1 | 3 | 6 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 4 | 4 | 1 | 6 | 4 |
| 3 | 3 | 1 | 2 | 4 | 5 |

2.

| n | $S_n^*(0)$ | $S_n^*(1)$ | | | |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| | | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 |
| 1 | 5 | 4 | 6 | 6 | 2 |
| 2 | 4 | 4 | 2 | 6 | 5 |
| 3 | 3 | 4 | 2 | 2 | 4 |

3.

| n | $S_n^*(0)$ | $S_n^*(1)$ | | | |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| | | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 |
| 1 | 5 | 6 | 4 | 1 | 7 |
| 2 | 4 | 4 | 2 | 6 | 3 |
| 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 |

4.

| n | $S_n^*(0)$ | $S_n^*(1)$ | | | |
|-----|------------|------------|------------|------------|------------|
| | | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 |
| 1 | 6 | 6 | 8 | 1 | 8 |
| 2 | 3 | 4 | 2 | 6 | 5 |
| 3 | 4 | 2 | 6 | 6 | 10 |

W przypadku, gdy istnieje miara martyngłowa wskazać wszystkie instrumenty osiągalne.

Zadanie 7 Dany jest proces cen pewnego ryzykownego instrumentu finansowego

| | $S_0(\omega)$ | $S_1(\omega)$ | $S_2(\omega)$ |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| ω_1 | 8 | 9 | 11 |
| ω_2 | 8 | 9 | 8 |
| ω_3 | 8 | 8 | 10 |
| ω_4 | 8 | 8 | 7 |
| ω_5 | 8 | 7 | 8 |
| ω_6 | 8 | 6 | 6 |

Wyznaczyć filtrację generowaną przez proces cen oraz rozbić odpowiadające tej filtracji.

Zadanie 8 Załóżmy, że $r = 0$ i dany jest proces cen ryzykownego instrumentu finansowego

| | $S_0(\omega)$ | $S_1(\omega)$ | $S_2(\omega)$ |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| ω_1 | 8 | 10 | 13 |
| ω_2 | 8 | 10 | 9 |
| ω_4 | 8 | 7 | 5 |
| ω_5 | 8 | 7 | 8 |

1. Wyznaczyć miarę martyngalową, o ile istnieje.
2. Rozważmy europejską opcję sprzedaży tego instrumentu z ceną wykonania 10. Zakładając, że opcja ta jest instrumentem osiągalnym wyznaczyć jej cenę w chwili początkowej.

Zadanie 9 W modelu dwukresowym wyznaczyć cenę europejskiej opcji sprzedaży wyboru z ceną wykonania 7 dla zerowej stopy procentowej

| ω | $S_0(\omega)$ | $S_1(\omega)$ | $S_2(\omega)$ |
|------------|---------------|---------------|---------------|
| ω_1 | 5 | 8 | 9 |
| ω_2 | 5 | 8 | 6 |
| ω_3 | 5 | 4 | 6 |
| ω_4 | 5 | 4 | 3 |