Ćwiczenia 13 – 2016.01.14

Uwaga 1 *Rozważamy klasyczny model Blacka-Scholesa.*

Zadanie 1 (Uzupełnienie dowodu twierdzenia z wykładu) *Niech* $(\varphi_t)_{t\in[0,T]}$ *i* $(M_t)_{t\in[0,T]}$ *będą takie, jak w dowodzie twierdzenia o osiągalności wypłaty całkowalnej z kwadratem. Udowodnij, że*

1. $V_0(\varphi) = M_0$,
2. *dla dowolnego* t *z odcinka* $[0,T]$ *zachodzi* $V_t^\star(\varphi) = M_t$ *oraz* $V_t^\star(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u^\star$.

Zadanie 2 (Dowód twierdzenia o cenie europejskiej opcji kupna) *Udowodnij twierdzenie o cenie europejskiej opcji kupna (ostatnie twierdzenie z wykładu). Skorzystaj, z*

1. *twierdzenia o jawnej postaci ceny wypłaty całkowalnej z kwadratem,*
2. *funkcji wypłaty dla europejskiej opcji kupna danej wzorem* $f(x) = (x-K)^+$,
3. *zależności* $x\exp\Big((r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma y\sqrt{T-t}\Big) - K \geqslant 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $y \geqslant -d_1$.

Uwaga 2 *Niech cena europejskiej opcji kupna* C *będzie funkcją zależną od* τ, K, r, σ, S, *gdzie* τ *jest czasem pozostającym do wykupu opcji w momencie jej kupna tzn.* $\tau = T - t$, *a pozostałe symbole mają standardowe znaczenie z tym, że* $S = S_\tau$. *Wtedy wskaźniki greckie definiujemy wzorami*

- ***delta*** $\Delta := \frac{\partial C}{\partial S}$,
- ***gamma*** $\Gamma := \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$,
- ***vega*** $\mathcal{V} := \frac{\partial C}{\partial \sigma}$,
- ***rho*** $\rho := \frac{\partial C}{\partial r}$,
- ***theta*** $\Theta := -\frac{\partial C}{\partial t}$.

Zadanie 3 *Niech* $d_1 = \frac{\ln\frac{S}{K}+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{\ln\frac{S}{K}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$. *Wykonaj następujące polecenia*

1. *wyraź* $\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$ *przez* $\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}$,
2. *wyraź* $\frac{\partial d_2}{\partial \tau}$ *przez* $\frac{\partial d_1}{\partial \tau}$,
3. *wyraź* $\frac{\partial d_2}{\partial r}$ *przez* $\frac{\partial d_1}{\partial r}$,
4. *znajdź zależność między* $n(-d_1)$, *a* $n(d_1)$, *gdzie* $n(\cdot)$ *oznacza gęstość standaryzowanego rozkładu normalnego,*
5. *wyraź* $n(d_2)$ *przez* $n(d_1)$.

Zadanie 4 *Przyjmując, że cena europejskiej opcji kupna wyraża się wzorem*

$$C(\tau, K, r, \sigma, S) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2),$$

gdzie d_1 *i* d_2 *są takie jak w zadaniu 3. Korzystając z zależności otrzymanych w zadaniu 3 wyznacz wskaźniki greckie dla tej opcji.*

Zadanie 5 *Dla opcji, których cena zadana jest wzorem*

1. $P(\tau, K, r, \sigma, S) = -SN(-d_1) + Ke^{-r\tau}N(-d_2)$ (d_1 i d_2 *takie, jak w zadaniu 3),*
2. $C(\tau, K, r, \sigma, S) = Se^{-q\tau}N(d_+) - Ke^{-r\tau}N(d_-)$, *gdzie* $d_\pm = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r - q \pm \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ *(europejska opcja kupna indeksu/walut),*
3. $P(\tau, K, r, \sigma, S) = Ke^{-r\tau}N(-d_-) - Se^{-q\tau}N(-d_+)$, *gdzie* $d_\pm$ *takie jak w punkcie 2 (europejska opcja sprzedaży indeksu/walut),*
4. $C(\tau, K, r, \sigma, F) = Fe^{-r\tau}N(d_+) - Ke^{-r\tau}N(d_-)$, *gdzie* $d_\pm = \frac{\ln\frac{F}{K} \pm \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, *a* F *jest ceną terminową (europejska opcja kupna na kontrakt futures),*
5. $P(\tau, K, r, \sigma, F) = Ke^{-r\tau}N(-d_-) - Fe^{-r\tau}N(-d_+)$, *gdzie* $d_\pm$ *takie jak w punkcie 4 (europejska opcja sprzedaży kontraktu futures)*

policz wszystkie wskaźniki greckie.

Zadanie 6 *Udowodnić, że cena europejskiej opcji:*

1. *kupna,*
2. *sprzedaży*

jest funkcja wypukła i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja ceny wykonania.

Zadanie 7 *Udowodnić, że cena europejskiej opcji:*

1. *kupna,*
2. *sprzedaży*

jest funkcja wypukła i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja bieżącej ceny akcji.