

Ćwiczenia.* Probabilistyka – lista 0

kierunek: matematyka,† studia II°

autorka: dr U. Ostaszewska

Zadanie 1. Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład zmiennej losowej.

Zadanie 2. Niech $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$, $P(\{\omega\}) = \frac{1}{4}$ dla $\omega = 0, 1, 2, 3$. Definiujemy dwie zmienne losowe $X(\omega) = \sin \frac{\pi\omega}{2}$ oraz $Y(\omega) = \cos(\pi\omega)$. Znaleźć rozkłady i dystrybuanty zmiennych losowych X i Y . Obliczyć $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$.

Zadanie 3. Z talii 52 kart wyciągamy 6 i takiemu losowaniu przypisujemy liczbę pików. Znaleźć rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.

Zadanie 4. Funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{dla } -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{dla } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{dla } x \geq 4 \end{cases}$$

jest dystrybuantą zmiennej losowej X . Wtedy (odpowiedzieć tak lub nie):

- $P\{(X \leq 2)\} > P\{(X > 2)\}$;
- $W_X = \{-1, 1, 2, 3\}$;
- $P\{(X = 3)\} = \frac{7}{8}$;
- $P\{(X^2 - 1 = 0)\} = \frac{1}{2}$.

Zadanie 5. Z kwadratu $[0, 1]^2$ losujemy punkt (x, y) . Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie współrzędnych wylosowanego punktu. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej X .

Zadanie 6. Wyznaczyć zbiór wszystkich trójek a, b i c , dla których funkcja

$$F(t) = \begin{cases} at^2 & \text{dla } t < 0 \\ bt + c & \text{dla } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{dla } t \geq 2 \end{cases}$$

jest

- dystrybuantą zmiennej losowej,
- dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym,
- dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie ciągłym.

Zadanie 7. Dla jakiego a funkcja $f(x) = (ax - 1)\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ jest gęstością rozkładu zmiennej losowej?

*©J.Kotowicz

†specjalności: matematyka finansowa oraz analiza danych i modelowanie

Zadanie 8. Dla jakiego c funkcja określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} c \cos x & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{4}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$$

jest gęstością rozkładu pewnej zmiennej losowej? Nie licząc całki podać ile wynosi prawdopodobieństwo w punkcie $\frac{\pi}{4}$. Odpowiedź uzasadnij. Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej losowej.

Zadanie 9. Funkcje $f_i, i = 1, 2, 3$ są gęstościami rozkładów jednostajnych na odcinkach $(i-1, i)$. Wtedy są gęstościami także funkcje (odpowiedzieć tak lub nie):

- a) $f_1 + f_2 + f_3$,
- b) $f_2 \cdot f_3$,
- c) $|f_3 - f_1|$,
- d) $\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$,
- e) $\max(f_1, f_2)$.

Zadanie 10. Wiemy, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda > 0$ i $P(\{X < 2\}) = \frac{3}{4}$. Obliczyć λ .

Zadanie 11. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$. Oblicz prawdopodobieństwo:

- a) $P(\{X < 3\})$
- b) $P(\{X > 2\})$
- c) $P(\{|X| < 1\})$

Zadanie 12. Zmienna losowa ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Oblicz prawdopodobieństwo:

- a) $P(\{X > 0\})$,
- b) $P(\{X > 2\})$,
- c) $P(\{|X| < 1\})$,
- d) $P(\{|X| > 1\})$,
- e) $P(\{0 < X < 3\})$,
- f) $P(\{-1 < X < 3\})$.

Zadanie 13. Zmienna losowa ma rozkład $\mathcal{N}(1, 2)$. Oblicz prawdopodobieństwo:

- a) $P(\{|X| > 3\})$
- b) $P(\{X^2 \leq \frac{3}{4} + X\})$

Zadanie 14 (E.A.¹ 18.01.1997/zad.2). Jeśli dla zmiennej losowej o rozkładzie Poissona mamy:

$$P(\{N \leq 1\}) = \frac{8}{9}P(\{N = 2\}),$$

to:

A) $E(N) = \frac{17}{9}$, B) $E(N) = 3$, C) $D^2(N) = 2$, D) $E(N^2) = 3$, E) $E(N) = \frac{8}{9}$.

¹Oznacza egzamin aktuarialny

Zadanie 15 (E.A. 26.10.1996/zad.10). Niech X ma funkcję gęstości

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\mathbf{1}_{(-1,1)}(x),$$

gęstość zmiennej losowej $Y = X^2$ dana jest dla $y \in (0, 1)$ wzorem:

A) $\frac{1}{2\sqrt{y}}$, B) $2y$, C) $\frac{3}{2} - y$, D) $\frac{4}{3} - y^2$, E) $\frac{1}{(y+1)\ln 2}$.

Zadanie 16 (E.A. 5.12.1998/zad.4). Zmienna losowa N ma rozkład z geometrycznym ogonem, tzn. dany wzorem

$$P(N = k) = \begin{cases} p_0 & \text{dla } k = 0 \\ (1 - p_0)pq^{k-1} & \text{dla } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

gdzie parametry rozkładu $p_0 = 0,5$ oraz $p = 1 - q = 0,25$. Wartość oczekiwana tej zmiennej wynosi:

A) 1,5; B) 2; C) 2,5; D) 3; E) 3,5.

Zadanie 17 (E.A. 7.12.1996/zad.2). Załóżmy, że zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o gęstości:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \text{dla } x > 0.$$

Niech $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x . Wartość oczekiwana zmiennej losowej $N = [X + \frac{1}{2}]$ wyraża się wzorem:

A) $[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}]$, B) $[\frac{1}{\lambda}] + \frac{1}{2}$, C) $\frac{1}{[\lambda]} + \frac{1}{2}$, D) $\frac{e^{\frac{1}{2}\lambda}}{e^\lambda - 1}$, E) $\frac{1}{e^\lambda - 1}$.