Ćwiczenia:* Probabilistyka – lista 1
kierunek: matematyka,† studia II°

dr Jarosław Kotowicz

1 Gęstość i dystrybuanta rozkładu wielowymiarowego

Zadanie 1. *Czy można dobrać stałą c tak, aby funkcja*

- $f(x,y) = \begin{cases} cxy + x + y & \textit{dla } 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \textit{dla pozostałych punktów} \end{cases}$,
- $f(x,y) = \begin{cases} cxy & \textit{dla } 1 \leqslant x \leqslant 2, 2 \leqslant y \leqslant 4 \\ 0 & \textit{dla pozostałych punktów} \end{cases}$

była gęstością rozkładu dwuwymiarowego. Jeśli tak, to dla tak obliczonej stałej policzyć dystrybuantę tego rozkładu.

Zadanie 2. *Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa układu trzech zmiennych losowych (X,Y,Z) mając daną dystrybuantę*

$$F(x,y,z) = \begin{cases} (1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz}) & \textit{dla } x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \\ 0 & \textit{dla pozostałych} \end{cases}.$$

Zadanie 3. *Czy można dobrać parametr c tak, aby podane funkcja była gęstością pewnego rozkładu zmiennej losowej.*

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy + x & \textit{dla } x \in \langle 0,2\rangle \wedge y \in \langle 0,1\rangle \\ 0 & \textit{w p.p.} \end{cases}$$

Zadanie 4. *Niech*

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{dla } x < 0 \vee y < 0 \\ y - y\exp(-3x) & \textit{dla } x > 0, 0 < y < 1 \\ 1 - \exp(-3x) & \textit{dla } x > 0, y > 1 \end{cases}$$

będzie dystrybuantą dwuwymiarowego rozkładu. Wyznaczyć gęstość tego rozkładu.

Zadanie 5. *Niech*

$$g(x,y) = \begin{cases} \exp(-\pi x) & \textit{dla } x > 0, y \in [0,\pi] \\ 0 & \textit{dla pozostałych } x, y \end{cases}$$

będzie gęstością dwuwymiarowego rozkładu. Znaleźć dystrybuantę tego rozkładu.

Zadanie 6. *Niech $f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$ będzie gęstością prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y). Wyznaczyć dystrybuantę (X,Y).*

Zadanie 7. *Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X,Y) mając jej dystrybuantę*

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-3x} - e^{-4y} + e^{-3x-4y} & \textit{dla } x, y > 0 \\ 0 & \textit{przeciwnym przypadku} \end{cases}.$$

---

† specjalności: matematyka finansowa oraz analiza danych i modelowanie

2 Rozkłady wielowymiarowe (dyskretne)

Zadanie 8. *Doświadczenia niezależne przerywane są, gdy zdarzenie losowe A zostanie zaobserwowane po raz drugi. Niech zmienna losowa X_1 oznacza numer doświadczenia, gdy A pojawi się pierwszy raz, X_2 numer doświadczenia, gdy A pojawi się drugi raz. Wyznaczyć rozkład układu (X_1, X_2).*

Zadanie 9. *Spośród N ponumerowanych elementów losowanych jest n elementów (schemat losowania ze zwracaniem). Zmienne losowe X_1, X_2 są określone następująco:*

- *X_1 - wartość najmniejszego wylosowanego numeru,*
- *X_2 - wartość największego wylosowanego numeru.*

Wyznaczyć rozkład układu (X_1, X_2) oraz $E(X_1X_2)$.

Zadanie 10. *Rzucamy dwukrotnie kostką. Wartość pierwszej współrzędnej jest równa wartości bezwzględnej różnicy oczek w obu rzutach, a wartość drugiej współrzędnej jest równa iloczynowi oczek, które wypadły w obu rzutach. Znaleźć rozkład tak określonej dwuwymiarowej zmiennej losowej.*

3 Rozkłady brzegowe i momenty

Zadanie 11. *Policzyć dla gęstości z zadania 1 rozkłady brzegowe.*

Zadanie 12. *Wyznaczyć dystrybuanty oraz rozkłady brzegowe następującego rozkładu dwuwymiarowego*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 2-x \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów.} \end{cases}.$$

Zadanie 13. *Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład równomierny na kwadracie $\langle 0, 2\rangle^2$. Obliczyć rozkłady brzegowe.*

Zadanie 14. *Dana jest dwuwymiarowa gęstość*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{9}xy & \text{dla } x, y \in \langle 1, 2\rangle \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Obliczyć moment rzędu 2

- *(2,0);*
- *(1,1).*

Zadanie 15. *Wyznaczyć stałą c, tak aby funkcja $f(x, y) = c\exp(-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2))$ była gęstością. Obliczyć momenty zwykłe rzędu 2.*

Zadanie 16. *(X,Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$. Obliczyć wszystkie momenty zwykłe i centralne rzędu 2.*

Zadanie 17. *Policzyć dla gęstości z zadania 3*

- *rozkłady brzegowe;*
- *momenty zwykłe i centralne rzędu pierwszego i drugiego.*

Zadanie 18. *Znaleźć rozkłady brzegowe zmiennych losowych X, Y znając gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y):*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/16 & \text{dla } |x| < 2, |y| < 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Zadanie 19. *Znaleźć gęstości rozkładów brzegowych zmiennych losowych X i Y, mając gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y)*

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\exp(-x-2y) & \text{dla } x, y > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Zadanie 20. *Znaleźć rozkłady brzegowe zmiennych losowych X, Y mając rozkład zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) opisany tabelką*

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	0,05	0,23	0,20	0,12
y_2	0,20	0,08	0,10	0,02

Zadanie 21. *Na $\mathbb{R}^2$ określamy rozkład: $P(-1,0) = 0,1$, $P(-1,1) = 0,2$, $P(0,0) = 0,2$, $P(0,1) = 0,3$, $P(1,1) = 0,2$. Czy P jest iloczynem swoich rozkładów brzegowych?*

4 Wielowymiarowy rozkład normalny

Zadanie 22. *Dana jest macierz kowariancji układu zmiennych losowych normalnych (X, Y, Z)*

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Podać wzór na gęstość prawdopodobieństwa jeśli $E(X) = E(Y) = E(Z) = 0$.

Zadanie 23. *Wiedząc, że układ zmiennych losowych o rozkładzie normalnym ma brzegowe wartości oczekiwane równe zero oraz macierzy kowariancji równą*

- $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,
- $M = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

wyznaczyć jego gęstość.

Zadanie 24. *Dana jest gęstość prawdopodobieństwa*

$$f(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{8}(2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2)\right].$$

Zbudować macierz kowariancji.

Zadanie 25. *Dana jest gęstość prawdopodobieństwa*

$$f(x,y) = c\exp\left[-(4(x-5)^2 + 2(x-5)(y-3) + 5(y-3)^2)\right].$$

Wyznaczyć c, a następnie zbudować macierz kowariancji.

Zadanie 26. *Trójwymiarowa zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład o gęstości*

- $f(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{6\pi}} \exp\{-\frac{1}{12}[6x^2 + (4(y-1)^2 + (z+2)^2 - 2(y-1)(z+2)]\}$,
- $f(x,y,z) = c\exp\{-\frac{1}{2}[2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz + 4xz]\}$.

Wyznaczyć macierz kowariancji (w przykładzie drugim wyznaczyć wcześniej stałą c).