Ćwiczenia:[*] Probabilistyka – lista 3
kierunek: matematyka[†] studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. *Niech* $X = I_A$ *będzie zmienną losową na* (Ω, Σ, P), *niech też* $B \in \Sigma$. *Oznaczmy* $G = \sigma(\{B\})$. *Wyznacz* $E(X|G)$.

Zadanie 2. *Niech rozkład wektora* $(X;Y)$ *będzie dany tabelką:*

$X \backslash Y$	0	1	2
-1	1/4	1/4	0
1	0	1/4	1/4

Jaka jest $E(X|\sigma(Y))$*?*

Zadanie 3. *Niech* $\Omega = [0,1]$, $\Sigma = \mathcal{B}(\Omega)$, *a* P *miara Lebesgue'a na* Ω. *Wyznacz* $E(f|\mathcal{F})$, *gdzie*

1. $f(x) = \sqrt{x}$ *i* $\mathcal{F}$ *jest* σ*-ciałem generowanym przez zbiory* $[0, \frac{1}{4}[$, $[\frac{1}{4}, 1]$,
2. $f(x) = -x$ *i* $\mathcal{F}$ *jest* σ*-ciałem generowanym przez zbiory* $[0, \frac{1}{2}[$, $[\frac{1}{3}, 1]$,

Zadanie 4. *Niech* X *będzie liczbą orłów otrzymanych w dwukrotnym rzucie symetryczną monetą, a* A *zdarzeniem polegającym na wyrzuceniu w pierwszym rzucie orła. Oblicz* $E(X|A)$.

Zadanie 5. *Udowodnij, że jeżeli* $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ *stanowi rozbicie przestrzeni* Ω, *to*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} E(X|A_i)P(A_i).$$

Zadanie 6. *Niech* $X_1, \ldots, X_n$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie dwupunktowym takim, że dla ustalonego* $p \in]0,1[$

$$P(\{X_i = 1\}) = 1 - P(\{X_i = 0\}) = p \text{ dla } i \in \overline{1,n}$$

Niech też $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Udowodnij, że*

$$E(X_1|S_n = k) = \frac{k}{n} \text{ dla } k \in \overline{0,n}$$

---

[*] ©J.Kotowicz

[†] specjalności: matematyka finansowa oraz analiza danych i modelowanie