

Ćwiczenia:* Probabilistyka – lista 4
kierunek: matematyka,† studia II°

autorka: dr U.Ostaszewska

Zadanie 1. Zadania z list 3 i 4 dr U. Ostaszewskiej z roku akademickiego 2015/2016.

Zadanie 2. W 10-cio elementowej partii pewnego towaru są 2 sztuki wadliwe. Wylosowano bez zwrotu 2 sztuki. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie sztuk wadliwych wśród 2 wylosowanych sztuk, zaś Y przyjmuje wartość 1, jeśli pierwsza wylosowana sztuka jest wadliwa, oraz 0, jeśli nie jest wadliwa. Obliczyć $P(\{X + Y = 2\})$ oraz $E(X + Y)$.

Zadanie 3. Niech $X \sim \text{Poisson}(\lambda_1)$, $Y \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $X + Y$. Rozwiązanie uogólnić na dowolną sumę rozkładów Poissona.

Zadanie 4. Niech X_1, X_2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$, $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. Znaleźć gęstość zmiennej losowej $X_1 + X_2$.

Zadanie 5. Niech zmienne losowe X, Y będą niezależne i mają jednakowe rozkłady $\text{Exp}(1)$, i niech $U = X + Y$, $V = \frac{X}{X+Y}$. Znaleźć

- gęstość zmiennej losowej U ,
- gęstość zmiennej losowej V ,
- czy zmienne U, V są niezależne?

Zadanie 6. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $\text{Exp}(\lambda)$ oraz $U[0, 1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$.

Zadanie 7. Niech zmienna losowa X ma rozkład równomierny dwupunktowy i $W_X = \{0, 1\}$, natomiast zmienna losowa Y ma rozkład $U[0, 1]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$. Zakładamy niezależność zmiennych losowych X i Y .

Zadanie 8. Każdy z dwóch odcinków o długości a podzielono losowo wybranym punktem na 2 części. Zakładając, że długości krótszych odcinków są zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym, obliczyć prawdopodobieństwo, że suma (S) długości krótszych odcinków spełnia nierówność $\frac{1}{4}a \leq S \leq \frac{3}{4}a$.

Zadanie 9. Zakładając, że zmienne losowe X i Y są niezależne i mają te same rozkłady geometryczne z parametrem p , wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$.

Zadanie 10. X i Y są niezależnymi, standaryzowanymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = X^2 + Y^2$.

Zadanie 11. Wykazać, że kompozycja niezależnych rozkładów gamma jest również rozkładem gamma.

Zadanie 12. Znaleźć kompozycję dwóch niezależnych rozkładów jednostajnych na odcinku $[0, 1]$.

Zadanie 13. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{5}}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2)\right].$$

Wyznaczyć łączny rozkład układu zmiennych losowych (U, V) , gdzie $U = X + Y$ i $V = X - Y$.

*©J.Kotowicz

†specjalności: matematyka finansowa oraz analiza danych i modelowanie

Zadanie 14. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym. Wykazać, że zmienne $X + Y$, $\frac{X}{Y}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Zadanie 15. Niech niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ . Wyznaczyć $E(X + Y)$ oraz $E(X - Y)$.

Zadanie 16 (E.A. 5.10.2009). Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 1$. Niech $U = 2X + Y$ i $V = X - Y$. Wtedy prawdopodobieństwo $P(\{U \in (0, 6) \wedge V \in (0, 6)\})$ jest równe:

a) $1 - 2e^{-1}$ b) $\frac{1}{2}(4e^{-3} - 3e^{-4})$ c) $\frac{1}{2}(1 - 4e^{-3} + 3e^{-4})$ d) $1 - e^{-3}$