

Ćwiczenia.* Probabilistyka – lista 5

kierunek: matematyka,† studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1 (Egzamin Aktuarialny). Załóżmy, że X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ równą 10.

1. Wyznacz rozkład warunkowy zmiennej X_3 pod warunkiem $X_1 + X_2 + X_3 = 9$,
2. Oblicz $D^2(X_3 + X_4 | X_1 + X_2 + X_3 = 9)$.

Zadanie 2 (Egzamin Aktuarialny). Niech będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości $f(x, y) = (2x^2 + \frac{4}{3}xy)\mathbb{I}_{\{0 < x < 1\}}\mathbb{I}_{\{0 < y < 1\}}$. Niech $S = X + Y$ i $V = Y - X$.

1. Wyznacz gęstość układu (V, S) .
2. Wyznacz gęstość warunkową $f_{V|S}$.
3. Oblicz $E(V | S = 1)$.

Zadanie 3 (Egzamin Aktuarialny). Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 1, a zmienna losowa Y rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej 2. Obie zmienne są niezależne.

1. Wyznacz gęstość układu $(Y, X + Y)$.
2. Wyznacz gęstość warunkową $f_{Y|X+Y}$.
3. Oblicz $E(Y | X + Y = 3)$.

Zadanie 4 (Egzamin Aktuarialny). Niech (X, Y) będzie dwuwymiarową zmienną losową o funkcji gęstości $f(x, y) = \frac{2}{x^3}\mathbb{I}_{\{x > 1\}}\mathbb{I}_{\{1 < y < 2\}}$. Niech $S = X + Y$ i $V = X - Y$.

1. Wyznacz gęstość układu (V, S) .
2. Wyznacz gęstość warunkową $f_{V|S}$.
3. Oblicz $P(\{V < 1\} | \{S = 4\})$.

Zadanie 5 (Egzamin Aktuarialny). Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładów o gęstościach $f_X(x) = 32x^2e^{-4x}\mathbb{I}_{\{x > 0\}}$, $f_Y(x) = 16xe^{-4x}\mathbb{I}_{\{x > 0\}}$

1. Wyznacz rozkłady zmiennych $X - Y$ i $X + Y$.
2. Wyznacz rozkład warunkowy X pod warunkiem $X + Y$.
3. Wyznacz rozkład warunkowy Y pod warunkiem $X + Y$.
4. Oblicz $E(X - Y | X + Y = s)$.

Zadanie 6 (Egzamin Aktuarialny). Niech U i V będą niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu jednostajnego na przedziale $(0, 1)$. Niech

$$X = \frac{U^{\frac{1}{2}}}{U^{\frac{1}{2}} + V^4} \quad i \quad Y = U^{\frac{1}{2}} + V^4.$$

*©J.Kotowicz

†specjalności: matematyka finansowa oraz analiza danych i modelowanie

1. Wyznacz gęstość układu (X, Y) .
2. Wyznacz rozkład (X, Y) .
3. Oblicz $E(X|Y < 1)$.

Zadanie 7 (Egzamin Aktuariatny). Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład prawdopodobieństwa o funkcji gęstości $f(x, y) = 8xy\mathbb{I}_{\{0 < y < x < 1\}}$. Niech $U = X + Y$ i $V = X - Y$.

1. Wyznacz gęstość warunkową $f_{V|U}$.
2. Oblicz $E(V|U = \frac{4}{3})$.

Zadanie 8. Rozpatrzmy wektor losowy (X, Y) o rozkładzie jednostajnym na trójkącie $\{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$.

1. Oblicz $P(\{X \leq 1\}|\{Y = 1/2\})$.
2. Oblicz $E(X|Y = \frac{1}{2})$ oraz $E(X|Y = y)$.

Zadanie 9. Niech (X, Y) ma gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & \text{dla } x, y > 0, x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

1. Oblicz gęstości warunkowe.
2. Oblicz $E(Y|X = x)$.

Zadanie 10. Wyznacz rozkład warunkowy $X|[X]$ oraz $[X]|X$, gdzie X ma rozkład $Exp(1)$, a $[x]$ to cecha z x .

Zadanie 11. Wyznacz rozkład warunkowy $X|X + Y$, jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi

1. o rozkładzie $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$,
2. o rozkładach kolejno $Poiss(\lambda)$, $Poiss(\mu)$.

Zadanie 12. W urnie znajduje się 21 kul ponumerowanych od 1 do 21. Losujemy jedną kulę. Zmienna X przyjmuje wartość 1, gdy wyciągniemy kulę z numerem parzystym oraz 0 w przeciwnym przypadku. Zmienna Y przyjmuje 1, gdy wyciągniemy kulę z numerem podzielny przez 3 oraz 0 w przeciwnym przypadku.

1. Wyznacz rozkład łączny wektora $((X + Y)^2, Y)$.
2. Wyznacz rozkład warunkowy $(X + Y)^2|Y$.
3. Porównaj wyznaczony rozkład warunkowy z rozkładem brzegowym $(X + Y)^2$ z punktu 1.

Zadanie 13. Gęstość rozkładu wektora losowego (X, Y) ma postać $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{8} e^{-y} \mathbb{I}_{\{y > 0\}} \mathbb{I}_{\{|x| < y\}}$.

1. Wyznacz gęstości rozkładów warunkowych $X|Y$ i $Y|X$.
2. Oblicz $P(X > 0|Y > 1)$ i $P(Y > 1|X > 0)$.

Zadanie 14. Gęstość rozkładu wektora (X, Y) dana jest wzorem $f(x, y) = \frac{1}{4} \mathbb{I}_{(0,2)}(x) I_{(0,2)}(x - y)$.

1. Wyznacz gęstość warunkową $f_{Y|X}$.
2. Oblicz $P(|Y| < 1|X = 1)$ i $E(Y|X)$.

Zadanie 15. Rozkład wektora losowego (X, Y) ma gęstość $f(x, y) = 4xye^{-(x^2+y^2)} \mathbb{I}_{(0,1)}(x) \mathbb{I}_{(0,1)}(y)$. Wyznacz rozkłady warunkowe $f_{X|Y}$ i $f_{Y|X}$.

Zadanie 16. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie jednostajnym na $(0, 1)$. Wyznacz rozkład warunkowy $U = \min(X, Y)$ względem $V = \max(X, Y)$.

Zadanie 17. Niech $f_{X|Y}(x|y) = cxy^{22}\mathbb{I}_{\{0 < x < y\}}\mathbb{I}_{\{0 < y < 1\}}$. Wyznacz stałą c , a następnie oblicz $P(\frac{1}{4} < X < 12|Y = 58)$.

Zadanie 18. Łączna gęstość X i Y dana jest wzorem $f(x, y) = 21x^2y^3\mathbb{I}_{\{0 < x < y < 1\}}$.

1. Wyznacz $E(X)$ i $E(X|Y = y)$.
2. Znajdź rozkład zmiennej losowej $Z = E(X|Y)$ i na jego podstawie oblicz $E(Z)$. Wynik porównaj z $E(X)$.

Zadanie 19. Łączna gęstość X i Y dana jest wzorem $f(x, y) = 2\exp\{-(x + y)\}\mathbb{I}_{\{0 < x < y < 1\}}$. Znajdź $E(Y|X = x)$.