

Ćwiczenia.* Probabilistyka – lista 8

kierunek: matematyka,† studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych, a X zmienną losową określoną na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Udowodnij, że jeśli ten ciąg jest zbieżny według prawdopodobieństwa do X , to jest zbieżny według rozkładu do X .

Zadanie 2. Podaj przykład ciągu zmiennych losowych określonego na przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) zbieżnego według rozkładu i niezbieżnego według prawdopodobieństwa.

Zadanie 3. Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych, a X zmienną losową określoną na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ takim, że istnieje $c \in \mathbb{R}$ o własności $P(\{X = c\}) = 1$. Udowodnij, że jeśli ten ciąg jest zbieżny według rozkładu do X , to jest zbieżny według prawdopodobieństwa do X .

Zadanie 4. Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych, X zmienną losową określoną na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, a α i β liczbami rzeczywistymi. Udowodnij, że jeśli ten ciąg jest zbieżny według rozkładu do X , to jest ciąg $(\alpha X_n + \beta)$ jest też zbieżny według rozkładu do $\alpha X + \beta$.

Zadanie 5. Udowodnij, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$ i $Y_n \xrightarrow{D} 0$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$.

Zadanie 6. Udowodnij, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$ i $Y_n \xrightarrow{D} c$, to $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + c$.

Zadanie 7. Podaj przykład ciągów zmiennych losowych (X_n) i Y_n oraz zmiennych losowych X i Y takich, że $X_n \xrightarrow{D} X$ oraz $Y_n \xrightarrow{D} Y$, ale nieprawdą jest, że $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + Y$.

Zadanie 8. Udowodnij, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$ i $Y_n \xrightarrow{D} 0$, to $X_n Y_n \xrightarrow{D} 0$.

Zadanie 9. Udowodnij, że jeśli $X_n \xrightarrow{D} X$ i $Y_n \xrightarrow{D} a$, to $X_n Y_n \xrightarrow{D} aX$.

Zadanie 10 (owad i mrówki). Owad składa jaja zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem a . W nocy mrówki kradną mu jaja. Szansa, że dane jajo zostanie ukradzione, wynosi q . Następnego dnia historia się powtarza (liczba złożonych jaj ma ten sam rozkład, co poprzedniego dnia i jest niezależna od przeszłości), itd. Jaki jest rozkład graniczny liczby jaj ocalonych przed mrówkami?

Zadanie 11. Niech ciąg (X_n) będzie zbieżny według rozkładu do zmiennej X , a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, gdzie a jest punktem ciągłości dystrybuanty F_X . Udowodnij, że $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(a_n) = F(a)$.

Zadanie 12. Dane są dwa ciągi zmiennych losowych (X_n) , (Y_n) , gdzie $X_n \sim \text{Exp}(\frac{1}{n})$ natomiast $Y_n \sim U[0, \frac{1}{n}]$. Zbadaj zbieżność tych ciągów według rozkładu.

Zadanie 13. Dane są dwa ciągi zmiennych losowych (X_n) , (Y_n) , gdzie $X_n \sim \text{Exp}(p_n)$ natomiast $P(\{Y_n = 0\}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ i $P(\{Y_n = 1\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$. Zbadaj zbieżność według rozkładu tych ciągów.

Zadanie 14. Niech (X_n) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $U[0, 1]$ oraz $Y_n = n \cdot \min(X_1, \dots, X_n)$. Czy istnieje taka zmienna losowa, że ciąg (Y_n) jest zbieżny według rozkładu do niej?

Zadanie 15. Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych takich, że $X_n \sim N(0, \sigma_n)$. Zakładając, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ zbadaj zbieżność tego ciągu według rozkładu.

*©J.Kotowicz

†specjalności: matematyka finansowa oraz analiza danych i modelowanie

Zadanie 16. Dane są dwa ciągi zmiennych losowych $(X_n), (Y_n)$, gdzie $X_n \sim \text{Cauchy}(0, \frac{1}{n})$ natomiast $Y_n \sim \text{Cauchy}(0, n)$. Zbadaj zbieżność tych ciągów według rozkładu.

Zadanie 17. Udowodnij, że jeżeli $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{D} Y$ oraz dla dowolnego n zmienne X_n i Y_n są niezależne oraz zmienne X i Y są niezależne, to $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + Y$.