

Ćwiczenia.* Probabilistyka – lista 9

kierunek: matematyka,† studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. W pewnym towarzystwie ubezpieczeniowym jest ubezpieczonych 10000 samochodów. Każdy z właścicieli płaci roczną składkę 30 PLN za samochód. Średnio 6 na 1000 samochodów ulega uszkodzeniu w ciągu roku. Właścicielowi uszkodzonego pojazdu towarzystwo wypłaca 2500 zł. Na podstawie twierdzenia Moivre'a–Laplace'a oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu roku

1. towarzystwo nie poniesie strat,
2. zysk przekroczy 125000 zł?

Zadanie 2. Partia towaru ma wadliwość 7%. Pobrano próbkę 800 elementów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ilość sztuk wadliwych w tej próbie jest zawarta w granicach 6% - 9%.

Zadanie 3. Strzelamy 300 razy, przy czym prawdopodobieństwo za każdym razem trafienia do celu wynosi 0,25. Określić prawdopodobieństwo, że liczba celnych strzałów będzie się różnić o nie więcej niż 0,1 od

- ogólnej liczby strzałów.
- najbardziej prawdopodobnej liczby celnych strzałów.

Zadanie 4. Przeprowadzono 60 jednakowych prób, w których mogło zajść zdarzenie A. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia w pojedynczej próbie wynosi 0,6. Obliczyć prawdopodobieństwo, że zdarzenie nie pojawi się w większości prób.

Zadanie 5. W 10 000 rzutów monetą orzeł wypadł 5400 razy. Uzasadnij przypuszczenie, że moneta jest niesymetryczna.

Zadanie 6. Korzystając z prawa wielkich liczb Moivre'a-Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że w 720 rzutach kostką ilość szóstek będzie

- zawierać się pomiędzy 121 a 140,
- mniejsza niż 125,
- większa niż 110.

Zadanie 7. Rzucamy 1000 razy kostką. Niech zmienna losowa S oznacza sumę wyrzuconych oczek. Na podstawie twierdzenia Lindeberga

- ocenić $P(\{3450 \leq S \leq 3550\})$,
- znaleźć takie N, M jak najmniej różniące się od siebie, aby $P(\{M \leq S \leq N\}) > 0,99$.

Zadanie 8. Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia w jednym doświadczeniu wynosi 0,3. Z jakim prawdopodobieństwem można twierdzić, że częstość tego zdarzenia przy 100 doświadczeniach będzie zawarta w granicach od 0,2 do 0,4?

Zadanie 9. Mamy 100 obrabiarek pracujących niezależnie od siebie, o tej samej mocy i tym samym sposobie pracy. Każda z nich jest włączana w ciągu 0,8 całego czasu pracy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dowolnie wybranej chwili będzie włączanych od 70 do 86 obrabiarek?

*©J.Kotowicz

†specjalności: matematyka finansowa oraz analiza danych i modelowanie

Zadanie 10. Prawdopodobieństwo, że w ciągu czasu T przestanie działać jeden kondensator jest równe $0,2$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że spośród 100 kondensatorów w ciągu czasu T przestanie działać

- nie mniej niż 20 kondensatorów,
- mniej niż 20 kondensatorów,
- od 14 do 26 kondensatorów.

Zadanie 11. Pewna konstrukcja składa się ze 100 jednakowych elementów. Na podstawie CTG Lindeberga-Lévy'ego oszacować prawdopodobieństwo, że całkowita masa tej konstrukcji nie przekroczy 335 kg, jeśli rozkład masy elementów, z których jest złożona, ma wartość oczekiwaną 3,3 kg, a odchylenie standardowe 0,1 kg?

Zadanie 12. Czas oczekiwania na tramwaj linii 4 jest zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym o średniej 15 minut. Pan A codziennie w dni robocze dojeżdża nim do pracy. Oszacować na podstawie CTG Lindeberga-Lévy'ego prawdopodobieństwo, że pan A traci kwartalnie (czyli w ciągu 65 kolejnych dni roboczych) na czekaniu na tramwaj linii 4 nie więcej niż 1000 minut.

Zadanie 13. Dodano do siebie 10000 liczb, każda dana z dokładnością 10^{-m} . Błędy zaokrągłeń są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku $[-\frac{1}{2} \cdot 10^{-m}, \frac{1}{2} \cdot 10^{-m}]$. Znaleźć granice w których będzie się zawierał łączny błąd z prawdopodobieństwem większym niż 0,997.

Zadanie 14. Wykazać, że ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ zmiennych losowych niezależnych o takim samym rozkładzie i skończonej wariancji spełnia centralne twierdzenie graniczne (CTG).

Zadanie 15. Dany jest ciąg $(X_n)_{n \geq 1}$ zmiennych losowych niezależnych, przy czym $P(\{X_n = \pm\sqrt{n}\}) = \frac{1}{2}$. Dowiedź, że ciąg spełnia CTG.

Zadanie 16. Niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że zmienna X_n przyjmuje wartości 2^n , -2^n i 0 z prawdopodobieństwem równym odpowiednio $2^{-(2n+1)}$, $2^{-(2n+1)}$ i $1 - 2^{-2n}$. Czy dla tego ciągu spełniony jest warunek Lapunowa?

Zadanie 17. Niech $\alpha \in]0, 1[$ i niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $P(\{X_n = \pm n^\alpha\}) = \frac{1}{2n^\alpha}$ i $P(\{X_n = 0\}) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$. Dowiedź, że ciąg ten spełnia warunek Lapunowa.

Zadanie 18. Niech $\alpha \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$, $p \in]0, \frac{1}{2}[$ i niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $P(\{X_n = \pm \frac{1}{n^\alpha}\}) = p$ i $P(\{X_n = 0\}) = 1 - 2p$. Dowiedź, że ciąg ten spełnia warunek Lapunowa.

Zadanie 19. Niech $\alpha \in \mathbb{R}_+$ i niech $(X_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $P(\{X_n = \pm n^\alpha\}) = 0,25$ i $P(\{X_n = 0\}) = 0,5$. Dowiedź, że ciąg ten spełnia warunek Lindeberga.