Ćwiczenia:* Teoria opcji – lista 4
kierunek: matematyka, specjalność: matematyka finansowa, studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1 (Praca domowa)**.** *Rozpatrzmy opcje europejskie na ten sam instrument podstawowy o ustalonym czasie trwania T i ustalonej cenie wykonania K. Niech teraz $P^e(S)$ oznacza cenę opcji sprzedaży przy bieżącej cenie instrumentu podstawowego S, który w trakcie trwania opcji nie wypłaca dywidendy. Udowodnij, że funkcja $S \mapsto P^e(S)$*

- *jest malejąca,*
- *spełnia warunek Lipschitza ze stałą równa* 1*,*
- *jest wypukła,*

Zadanie 2 (Praca domowa)**.** *Rozpatrzmy opcje europejskie na ten sam instrument podstawowy o ustalonym czasie trwania T i ustalonej cenie wykonania K. Niech teraz $C^e(S)$ oznacza cenę opcji kupna przy bieżącej cenie instrumentu podstawowego S. Udowodnij, że funkcja $S \mapsto C^e(S)$*

- *jest rosnąca,*
- *spełnia warunek Lipschitza ze stałą równa L,*
- *jest wypukłą.*

gdzie $L = e^{-qT}$ dla opcji na instrument bazowy, który generuje ciągły dochód ze stopa q, lub $L = 1$ w pozostałych przypadkach.

Uwaga 1. *Rozważamy*

1. *wyłącznie rynek jednookresowy dwustanowy, gdzie stan świata ω_1 jest interpretowany jako korzystny dla inwestora, a ω_2 niekorzystny;*
2. *oznaczenia z wykładu;*
3. *inwestorów o różnym podejściu do ryzyka*
   (a) *skłonnego do ryzyka ($P(\{\omega_1\})$ bliskie 1),*
   (b) *obojętnego względem ryzyka ($P(\{\omega_1\}) = 0{,}5$),*
   (c) *z awersją do ryzyka ($P(\{\omega_1\})$ bliskie 0).*

Zadanie 3. *Niech instrument ryzykowny kosztuje* 1,5 *w chwili początkowej $t = 0$, a w chwili końcowej T może kosztować*

- $S_T(\omega_1) = \begin{cases} 10 & gdy\ \omega = \omega_1 \\ 2 & gdy\ \omega = \omega_2 \end{cases}$,
- $S_T(\omega_1) = \begin{cases} 9 & gdy\ \omega = \omega_1 \\ 2 & gdy\ \omega = \omega_2 \end{cases}$.

Natomiast dla instrumentu pozbawionego ryzyka jego wartość w chwili początkowej $t = 0$ to 1, a w chwili końcowej T to 2. Rozważmy pozycję długa w europejskiej opcji kupna, której funkcja wypłaty wynosi $(S_T - K)^+$, gdzie K równe jest odpowiednio 5 i 4. Wykonaj następujące polecenia

1. *Policz cenę opcji, jako zdyskontowaną na chwilę początkową wartość oczekiwaną funkcji wypłaty (podejście z matematyki ubezpieczeniowej/elementarnej matematyki finansowej) dla różnego typu inwestorów przyjmując, że $P(\{\omega_1\})$ jest równe* 0,9, 0,5 *i* 0,1.
2. *Dla tak wyznaczonych cen opcji wyznacz wypłatę ze strategii, polegającej na kupnie instrumentu bazowego w chwili początkowej za kwotę równą cenie opcji. Porównaj wyniki z wypłatą z opcji.*
3. *Sprawdź, czy model rynku z tym procesem cen i procesem konta bankowego jest modelem bez możliwości arbitrażu.*
4. *Wyznacz strategię replikującą wypłatę z tej opcji.*
5. *Policz wartość początkową strategii replikującej wypłatę z tej opcji.*
6. *Wyznacz miarę martyngałową tj. γ, a następnie zdyskontowaną wartość oczekiwaną względem tej miary funkcji wypłaty.*
7. *Porównaj dwa ostatnie wyniki.*

Zadanie 4. *Niech instrument ryzykowny kosztuje* 260 *w chwili początkowej $t = 0$, a w chwili końcowej T może kosztować*

$$S_T(\omega_1) = \begin{cases} 340 & gdy\ \omega = \omega_1 \\ 220 & gdy\ \omega = \omega_2 \end{cases}.$$

Inwestor uważa, że prawdopodobieństwo zaistnienia korzystnego stanu świata wynosi 0.2. *Niech wolna od ryzyka stopa procentowa od chwili początkowej do chwli końcowej wynosi $r = 1\%$. Rozważmy pozycję długa w europejskiej opcji kupna, której funkcja wypłaty wynosi $(S_T - 290)^+$. Wykonaj następujące polecenia*

1. *Sprawdź, czy model rynku z tym procesem cen i procesem konta bankowego jest modelem bez możliwości arbitrażu.*
2. *Wyznacz strategię replikującą wypłatę z tej opcji.*
3. *Policz wartość początkową strategii replikującej wypłatę z tej opcji.*
4. *Wyznacz miarę martyngałową tj. γ, a następnie zdyskontowaną wartość oczekiwaną względem tej miary funkcji wypłaty.*
5. *Porównaj dwa ostatnie wyniki.*

Zadanie 5. *Udowodnij, że przy założeniu $u \leqslant 1 + r$ strategia $\varphi = (-1, S_0)$ jest arbitrażem.*

Zadanie 6. *Udowodnij, że przy założeniu $d \geqslant 1 + r$ strategia $\varphi = (1, -S_0)$ jest arbitrażem.*

Zadanie 7. *Na podstawie zadań 5 i 6 uzasadnij implikację:*

Jeżeli $S^d < (1 + r)S_0 < S^u$, to rynek jest wolny od arbitrażu.