

Ćwiczenia:* Teoria opcji – lista 7

kierunek: matematyka, specjalność: matematyka finansowa,
studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Uwaga 1. Rozważamy model rynku skończonego.

Zadanie 1. Udowodnij, że w modelu rynku istnieje możliwość arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje strategia samofinansująca się φ taka, że

$$P(\{V_T^*(\varphi) \geq V_0(\varphi)\}) = 1 \quad \text{oraz} \quad P(\{V_T^*(\varphi) > V_0(\varphi)\}) > 0.$$

Zadanie 2. Udowodnij, że jeżeli istnieje strategia samofinansująca się φ taka, że $V_0(\varphi) < 0$ i $V_T(\varphi) \geq 0$, to istnieje na rynku strategia arbitrażowa.

Zadanie 3 (Zadanie z wykładu). Udowodnij, że zbiór wypłat osiągalnych jest przestrzenią wektorową.

Zadanie 4. Rozważmy rynek jednookresowy z jednym instrumentem ryzykownym o własności

S_0	S_1		
	ω_1	ω_2	ω_3
25	20	40	35

Inwestor uważa, że każdy stan świata jest jednakowo prawdopodobny. Wolna od ryzyka stopa procentowa wynosi 20%. Czy wszystkie wypłaty są na tym runku osiągalne?

Zadanie 5 (Prawo jednej ceny). Udowodnij, że w modelu rynku bez możliwości arbitrażu strategie inwestycyjne mające tę samą wartość w chwili końcowej mają tę samą wartość w chwili początkowej.

Zadanie 6. Wyznaczyć w modelu jednookresowym, o ile istnieją, miarę martyngałową oraz liniową miarę wyceny, przy następujących danych

1.

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
1	3	6	4	1	2
2	4	4	1	6	4
3	3	1	2	4	5

2.

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$			
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
1	5	4	6	6	2
2	4	4	2	6	5
3	3	4	2	2	4

*©J.Kotowicz

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$				
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	
3.	1	5	6	4	1	7
	2	4	4	2	6	3
	3	3	2	2	4	3

n	$S_n^*(0)$	$S_n^*(1)$				
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	
4.	1	6	6	8	1	8
	2	3	4	2	6	5
	3	4	2	6	6	10

W przypadku, gdy istnieje miara martyngłowa wskazać wszystkie instrumenty osiągalne.

Zadanie 7. Dany jest proces cen pewnego ryzykownego instrumentu finansowego

	$S_0(\omega)$	$S_1(\omega)$	$S_2(\omega)$
ω_1	8	9	11
ω_2	8	9	8
ω_3	8	8	10
ω_4	8	8	7
ω_5	8	7	8
ω_6	8	6	6

Wyznaczyć filtrację generowaną przez proces cen oraz rozbitcie odpowiadające tej filtracji.

Zadanie 8. Załóżmy, że $r = 0$ i dany jest proces cen ryzykownego instrumentu finansowego

	$S_0(\omega)$	$S_1(\omega)$	$S_2(\omega)$
ω_1	8	10	13
ω_2	8	10	9
ω_4	8	7	5
ω_5	8	7	8

1. Wyznaczyć miarę martyngłową, o ile istnieje.

2. Rozważmy europejską opcję sprzedaży tego instrumentu z ceną wykonania 10. Zakładając, że opcja ta jest instrumentem osiągalnym wyznaczyć jej cenę w chwili początkowej.

Zadanie 9. W modelu dwukresowym wyznaczyć cenę europejskiej opcji sprzedaży wyboru z ceną wykonania 7 dla zerowej stopy procentowej

ω	$S_0(\omega)$	$S_1(\omega)$	$S_2(\omega)$
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3