

Ćwiczenia:* Teoria opcji – lista 11

kierunek: matematyka, specjalność: matematyka finansowa,
studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Uwaga 1. Rozważamy klasyczny model Blacka-Scholesa.

Zadanie 1. Niech $(\varphi_t)_{t \in [0, T]}$ i $(M_t)_{t \in [0, T]}$ będą takie, jak w dowodzie twierdzenia o osiągalności wypłaty całkowalnej z kwadratem. Udowodnij, że

1. $V_0(\varphi) = M_0$,
2. dla dowolnego t z odcinka $[0, T]$ zachodzi $V_t^*(\varphi) = M_t$ oraz $V_t^*(\varphi) = V_0(\varphi) + \int_0^t \varphi_u^1 dS_u^*$.

Zadanie 2. Udowodnij twierdzenie o cenie europejskiej opcji kupna. Skorzystaj, z

1. twierdzenia o jawnej postaci ceny wypłaty całkowalnej z kwadratem,
2. funkcji wypłaty dla europejskiej opcji kupna danej wzorem $f(x) = (x - K)^+$,
3. zależności $x \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})(T - t) + \sigma y \sqrt{T - t}\right) - K \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $y \geq -d_1$.

Uwaga 2. Niech cena europejskiej opcji kupna C będzie funkcją zależną od τ , K , r , σ , S , gdzie τ jest czasem pozostającym do wykupu opcji w momencie jej kupna tzn. $\tau = T - t$, a pozostałe symbole mają standardowe znaczenie z tym, że $S = S_\tau$. Wtedy wskaźniki greckie definiujemy wzorami

- **delta** $\Delta := \frac{\partial C}{\partial S}$,
- **gamma** $\Gamma := \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$,
- **vega** $\mathcal{V} := \frac{\partial C}{\partial \sigma}$,
- **rho** $\rho := \frac{\partial C}{\partial r}$,
- **theta** $\Theta := -\frac{\partial C}{\partial t}$.

Zadanie 3. Niech $d_1 = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$. Wykonaj następujące polecenia

1. wyraż $\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}$ przez $\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}$,
2. wyraż $\frac{\partial d_2}{\partial \tau}$ przez $\frac{\partial d_1}{\partial \tau}$,
3. wyraż $\frac{\partial d_2}{\partial r}$ przez $\frac{\partial d_1}{\partial r}$,
4. znajdź zależność między $n(-d_1)$, a $n(d_1)$, gdzie $n(\cdot)$ oznacza gęstość standaryzowanego rozkładu normalnego,

*©J.Kotowicz

5. wyraż $n(d_2)$ przez $n(d_1)$.

Zadanie 4. Przyjmując, że cena europejskiej opcji kupna wyraża się wzorem

$$C(\tau, K, r, \sigma, S) = SN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2),$$

gdzie d_1 i d_2 są takie jak w zadaniu 3. Korzystając z zależności otrzymanych w zadaniu 3 wyznacz wskaźniki greckie dla tej opcji.

Zadanie 5. Dla opcji, których cena zadana jest wzorem

1. $P(\tau, K, r, \sigma, S) = -SN(-d_1) + Ke^{-r\tau}N(-d_2)$ (d_1 i d_2 takie, jak w zadaniu 3),

2. $C(\tau, K, r, \sigma, S) = Se^{-q\tau}N(d_+) - Ke^{-r\tau}N(d_-)$, gdzie $d_{\pm} = \frac{\ln \frac{S}{K} + (r - q \pm \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$ (europejska opcja kupna indeksu/walut),

3. $P(\tau, K, r, \sigma, S) = Ke^{-r\tau}N(-d_-) - Se^{-q\tau}N(-d_+)$, gdzie d_{\pm} takie jak w punkcie 2 (europejska opcja sprzedaży indeksu/walut),

4. $C(\tau, K, r, \sigma, F) = Fe^{-r\tau}N(d_+) - Ke^{-r\tau}N(d_-)$, gdzie $d_{\pm} = \frac{\ln \frac{F}{K} \pm \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$, a F jest ceną terminową (europejska opcja kupna na kontrakt futures),

5. $P(\tau, K, r, \sigma, F) = Ke^{-r\tau}N(-d_-) - Fe^{-r\tau}N(-d_+)$, gdzie d_{\pm} takie jak w punkcie 4 (europejska opcja sprzedaży kontraktu futures)

policz wszystkie wskaźniki greckie.

Zadanie 6. Udowodnić, że cena europejskiej opcji:

1. kupna,

2. sprzedaży

jest funkcja wypukła i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja ceny wykonania.

Zadanie 7. Udowodnić, że cena europejskiej opcji:

1. kupna,

2. sprzedaży

jest funkcja wypukła i spełnia warunek Lipschitza jako funkcja bieżącej ceny akcji.