Ćwiczenia: Elementy wnioskowania bayesowskiego – lista 1
kierunek: matematyka,
specjalność: analiza danych i modelowanie,
studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1 (Własności wiarogodności)**.** *Załóżmy, że relacja $\precsim$ spełnia aksjomaty Ax.1–Ax.2. Udowodnij następujące stwierdzenia*

$$\forall_{A,B,D\in\mathcal{A}} \quad A\cap D = B\cap D = \emptyset \Rightarrow (A \precsim B \Leftrightarrow A\cup D \precsim B\cup D)\,. \tag{1}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{(A_k)_{k=1}^n,(B_k)_{k=1}^n\subset\mathcal{A}} \quad (A_k)_{k=1}^n - \textit{parami rozłączne} \ \wedge (B_k)_{k=1}^n - \textit{parami rozłączne} \ \wedge \left(\forall_{k\in\overline{1,n}}\, A_k \precsim B_k\right) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \precsim \bigcup_{k=1}^n B_k. \tag{2}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{(A_k)_{k=1}^n,(B_k)_{k=1}^n\subset\mathcal{A}} \quad (B_k)_{k=1}^n - \textit{parami rozłączne} \ \wedge \left(\forall_{k\in\overline{1,n}}\, A_k \precsim B_k\right) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \precsim \bigcup_{k=1}^n B_k. \tag{3}$$

$$\forall_{A,B\in\mathcal{A}} \quad A \precsim B \Leftrightarrow B' \precsim A'. \tag{4}$$

1. *Jeżeli oprócz złożeń z punktu* (2) *dodatkowo spełniony jest warunek $\exists_{k\in\overline{1,n}}\, A_k \prec B_k$, to zachodzi $\bigcup\limits_{k=1}^n A_k \prec \bigcup\limits_{k=1}^n B_k$.*
2. *(Uogólnienie punktu 1) Jeżeli oprócz złożeń z punktu* (3) *dodatkowo spełniony jest warunek $\exists_{k\in\overline{1,n}}\, A_k \prec B_k$, to $\bigcup\limits_{k=1}^n A_k \prec \bigcup\limits_{k=1}^n B_k$.*

Zadanie 2. *Załóżmy, że relacja $\precsim$ spełnia aksjomaty Ax.1–Ax.3. Udowodnij*

$$\forall_{A,B\in\mathcal{A}} \quad S\subset B \Rightarrow A \precsim B.$$
$$\forall_{A\in\mathcal{A}} \quad \emptyset \precsim A \precsim S.$$

Zadanie 3. *Załóżmy, że relacja $\precsim$ spełnia aksjomaty Ax.1–Ax.4. Udowodnij*

$$\forall_{(A_k)_{k=1}^\infty\subset\mathcal{A}}\forall_{B\in\mathcal{A}} \quad (A_k)_{k=1}^\infty - \textit{wstępujący} \ \wedge (\forall_{k\in\mathbb{N}} A_k \precsim B) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^\infty A_n \precsim B.$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\forall_{(A_k)_{k=1}^\infty,(B_k)_{k=1}^\infty\subset\mathcal{A}} \quad (A_k)_{k=1}^\infty - \textit{parami rozłączne} \ \wedge (B_k)_{k=1}^\infty - \textit{parami rozłączne} \ \wedge (\forall_{k\in\mathbb{N}}\, A_k \precsim B_k) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^\infty A_k \precsim \bigcup_{k=1}^\infty B_k.$$

Jeżeli dodatkowo spełniony jest warunek $\exists_{k\in\mathbb{N}}\, A_k \prec B_k$, *to* $\bigcup\limits_{k=1}^\infty A_k \prec \bigcup\limits_{k=1}^\infty B_k$.

Uwaga 1.

1. *Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0,1]$ zdefiniowanym na wykładzie. Definiujemy dla dowolnego przedziału $]a,b[\subset[0,1]$ zdarzenie $G(a,b):=\{s\in S: X(s)\in\,]a,b[\}$. Zauważmy, że dla dowolnych przedziałów postaci $]a,b], [a,b[, [a,b]$ mamy $G(a,b)\sim G[a,b[\sim G]a,b]\sim G[a,b]$.*

2. *W zadaniach 4 – 7 zakładamy, że spełnione są aksjomaty Ax.1–Ax.5*

Zadanie 4. *Udowodnij, że dla dowolnego zdarzenia A istnieje dokładnie jedna liczba $a^\star$ z przedziału $[0,1]$ taka, że $A\sim G[0,a^\star]$.*

Uwaga 2. *Określamy funkcję zbiorów $P\colon\mathcal{A}\to[0,1]$ własnością*

$$P(A)=a\Leftrightarrow A\sim G[0,a].$$

Zadanie 5. *Udowodnij, że P jest funkcją zbioru, która*

1. *jest addytywną tzn.*

$$\forall_{A,B\in\mathcal{A}}\quad A\cap B=\emptyset\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B).$$

2. *jest skończenie addytywną tzn.*

$$\forall_{(A_k)_{k=1}^n\subset\mathcal{A}}\quad (A_k)_{k=1}^n - \textit{parami rozłączne}\ \Rightarrow P(\bigcup_{k=1}^n A_k)=\sum_{k=1}^n P(A_k).$$

3. *spełnia warunek*

$$\forall_{(A_k)_{k=1}^\infty\subset\mathcal{A}}\quad (A_k)_{k=1}^\infty - \textit{ciąg zstępujący}\ \bigcap_{k=1}^\infty=\emptyset\Rightarrow\lim_{k\to\infty}P(A_k)=0.$$

4. *jest rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathcal{A}$.*

Zadanie 6. *Udowodnij, że relacja $\precsim$ jest zgodna z tak określonym prawdopodobieństwem P.*

Zadanie 7. *Udowodnij, że P jest jedynym rozkładem prawdopodobieństwa zgodnym z tą relacją.*

Zadanie 8. *Udowodnij, że jeżeli relacja $\precsim$ spełnia aksjomaty Ax.1–Ax.6 i P jest rozkładem zgodnym z tą relacją, to jest on jedynym rozkładem o własności*

$$\forall_{A,B,D\in\mathcal{A}}\quad (A|D)\precsim(B|D)\Leftrightarrow P(A|D)\leqslant P(B|D).$$

Zadanie 9 (Własności wiarogodności warunkowej)**.** *Załóżmy, że relacja $\precsim$ spełnia aksjomaty Ax.1–Ax.4 i Ax.6. Udowodnij następujące własności:*

$$\begin{aligned}
&\forall_{D\in\mathcal{A}}\quad D\sim\emptyset\Leftrightarrow\forall_{A,B\in\mathcal{A}}\,(A|D)\sim(B|D),\\
&\forall_{A,D\in\mathcal{A}}\quad (\emptyset|D)\precsim(A|D)\precsim(D|D),\\
&\forall_{A,B,D,E\in\mathcal{A}}\quad A\cap D\cap E\sim B\cap D\cap E\sim\emptyset\Rightarrow((A|E)\precsim(B|E)\Leftrightarrow(A\cup D|E)\precsim(B\cup D|E)),\\
&\forall_{A,B,D,E\in\mathcal{A}}\quad ((A|E)\precsim(B|E)\wedge(B|E)\precsim(D|E))\Rightarrow(A|E)\precsim(D|E),\\
&\forall_{A,B,D\in\mathcal{A}}\quad A\subset B\Rightarrow(A|D)\precsim(B|D),\\
&\forall_{A,B,D\in\mathcal{A}}\quad (A|D)\precsim(B|D)\Leftrightarrow(B'|D)\precsim(A'|D),\\
&\forall_{(A_k)_{k=1}^\infty\subset\mathcal{A}}\forall_{B,D\in\mathcal{A}}(A_k)_{k=1}^\infty - \textit{zstępujący}\ \wedge(\forall_{k\in\mathbb{N}}(B|D)\precsim(A_k|D))\Rightarrow(B|D)\precsim\left(\bigcap_{k=1}^\infty A_n\Big|D\right).
\end{aligned}$$