Ćwiczenia: Ukryte procesy Markowa – lista 1
kierunek: matematyka,
specjalność: analiza danych i modelowanie,
studia II°

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. *Dany jest łańcuch Markowa, który może przyjmować wartości* $1, 2, \ldots, 9, 10$. *Prawdopodobieństwa przeskoku do każdego stanu są równe. Znajdź stan stacjonarny.*

Zadanie 2. *Możliwe stany łańcucha* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *to 1,2,3, a jego macierz przejścia to*

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć

a) $P(X_2 = 1)$, *o ile* $P(X_0 = 1) = 1$,

b) $P(X_3 = 1)$, *o ile* $P(X_0 = 2) = 1$,

c) $P(X_2 = 2)$, *jeżeli start z dowolnego stanu jest jednakowo prawdopodobny.*

Zadanie 3. *Poklasyfikować stany łańcucha (istotne-nieistotne, pochłaniające, powracające-chwilowe), znaleźć wszystkie zamknięte zbiory stanów i zbadać, czy łańcuchy są nieprzywiedlne, jeżeli dane są macierze przejścia tych łańcuchów:*

$$a) \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 & 0 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 4. *W pierwszej urnie są 4 białe kule, a w drugiej urnie -4 czarne. W każdym kroku losujemy po jednej kuli z każdej urny i zamieniamy je miejscami. Niech stan procesu oznacza liczbę białych kul w pierwszej urnie. Opisać macierz przejścia tego łańcucha. Rozwiązać analogiczne zadanie, gdy każda urna zawiera* N *kul.*

Zadanie 5. *Załóżmy,że możliwymi stanami łańcucha* (Y_n) *są tylko 0 i 1, a macierz przejścia wygląda następująco:*

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix} \quad \alpha + \beta > 0.$$

Niech $P(Y_0 = 0) = p$. *Wykazać, że*

$$P(Y_n = 0) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + (1-\alpha-\beta)^n \left(p - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

Jak można „fizycznie" opisać proces o takiej macierzy przejścia?

Zadanie 6. *W ciągu prób Bernoulliego mówimy, że w chwili $n \geqslant 2$ układ jest w stanie E_1, gdy doświadczenia o numerach $n-1$ oraz n dały ciąg SS (sukces, sukces). Podobnie stany E_2, E_3 oraz E_4 określone są przez SP, PS, PP. Wyznaczyć macierz przejścia P oraz P^2 tego łańcucha.*

Zadanie 7. *Pokazać z definicji, że wszystkie stany łańcucha z zadania 6 są powracające.*

Zadanie 8. *Cząsteczka z położenia $i \in \mathbb{Z}$ skacze do $i+1$ z prawdopodobieństwem p lub do $i-1$ z prawdopodobieństwem $1-p$. Obliczyć $p_{00}(3)$, $p_{00}(4)$ oraz $p_{00}(n)$.*

Zadanie 9. *Załóżmy, że łączny kapitał graczy A i B wynosi k PLN. W pojedynczej grze gracz A wygrywa złotówkę od gracza B z prawdopodobieństwem p, a przegrywa z prawdopodobieństwem $1-p$. Za każdym razem, gdy dany gracz przegrywa ostatnią złotówkę przeciwnik oddaje mu ją z prawdopodobieństwem α. Znaleźć macierz przejścia dla łańcucha, który opisuje kapitał gracza A. Załóżmy, że na początek gracz A dostaje i PLN z prawdopodobieństwem $\frac{1}{k+1}$, $0 \leqslant i \leqslant k$. Jakie jest prawdopodobieństwo ruiny gracza A w dwóch grach?*

Zadanie 10. *Cząstka porusza się między stanami $0, 1, 2, 3, 4$ w taki sposób, że:*

- *ze stanu 1 może przejść do stanów 0,2,4 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$,*

- *ze stanu 2 może przejść do stanów 0,1,3 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$,*

- *ze stanu 3 może przejść do stanów 0,2,4 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$,*

- *ze stanu 4 może przejść do stanów 0,1,3 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$,*

- *po dotarciu do stanu 0 pozostaje w nim na zawsze.*

a) Napisać macierz przejścia.

b) Pokazać z definicji, że stany 1-4 są chwilowe.

c) Dla $n \geqslant 1$ obliczyć $f_{10}(n) = P(X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \ldots, X_{n-1} \neq 0, X_n = 0 | X_0 = 1)$.

d) Pokazać, że z prawdopodobieństwem 1 stan 0 pochłonie cząstkę.

Zadanie 11. *Łańcuch ma nieskończoną przestrzeń stanów $S = \{s_1, s_2, \ldots\}$. Pierwszy wiersz macierzy przejścia P ma postać $[a_1 a_2 \ldots]$, a w pozostałych wierszach $p_{i,i-1} = 1$, $i \geqslant 2$. Udowodnić, że stan s_1 jest powracający. Znaleźć wszystkie ciągi (a_n) dla których*

a) wybrany stan s_k jest powracający,

b) wszystkie stany są powracające.

Zadanie 12. *Pierwsza kolumna macierzy przejścia P łańcucha o przestrzeni stanów $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ ma postać $[q_0\ q_1\ \ldots]$, natomiast $p_{i,i+1} = 1 - q_i$ dla $i = 0, 1, 2, \ldots$. Badając stan 0 wykazać, że*

a) $q_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$ to wszystkie stany są chwilowe,

b) $q_i = \frac{1}{2}$ to wszystkie stany są powracające.

Zadanie 13. *Znaleźć wszystkie rozkłady stacjonarne łańcucha o macierzy przejścia*

$$a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Zadanie 14. *Zbadać kiedy istnieje rozkład stacjonarny dla łańcucha z zadania 6. Znaleźć ten rozkład w przypadku, gdy*

a) $a_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$, $i \geqslant 1$

b) $a_i = \frac{1}{i^2+i}$, $i \geqslant 1$

Zadanie 15. *Dla jakich p łańcuch z zadania 5 jest stacjonarny? Kiedy łańcuch ten jest ergodyczny? Obliczyć* $E(Y_3)$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} E(Y_n)$.

Zadanie 16. *Uzasadnić, że dla* $p, q > 0$ *takich, że* $p + q = 1$ *łańcuch o macierzy przejścia*

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}$$

jest ergodyczny i wyznaczyć prawdopodobieństwa ergodyczne.

Zadanie 17. *Łańcuch ma macierz przejścia*

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Wykorzystując własności stanów obliczyć $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$ *dla wszystkich* i, j.

Zadanie 18. *W ciągu doświadczeń Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu p mówimy, że w chwili n układ znajduje się w stanie 0, gdy n-te doświadczenie dało porażkę, a w stanie* $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, *gdy ostatnia porażka nastąpiła w chwili* $n-k$ *(zerowe doświadczenie uważamy za porażkę). Innymi słowy, stan w chwili n to długość nieprzerwanej serii sukcesów, kończącej się w chwili n. Obliczyć* $p_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}(n)$.

Zadanie 19. *Niech P będzie macierzą rozmiaru* $n \times n$ *podwójnie stochastyczną, tzn. taką, w której zarówno suma każdego wiersza jak i każdej kolumny jest równa 1. Znaleźć rozkład stacjonarny łańcucha o takiej macierzy przejścia.*
Wskazówka – *zobacz np. zad. 13 a), b).*

Zadanie 20. *Niech P będzie macierzą przejścia łańcucha Markowa o n stanach. Pierwszy wiersz tej macierzy składa się z elementów* $p_1, p_2, \ldots, p_n$, *a następne wiersze powstają z niego przez cykliczne przesunięcie, tzn. drugi wiersz ma postać* $p_n, p_1, \ldots, p_{n-1}$, *trzeci wiersz ma postać* $p_{n-1}, p_n, p_1, \ldots, p_{n-2}$ *itd, a ostatni ma postać* $p_2, p_3, \ldots, p_n, p_1$. *Czy ten łańcuch jest ergodyczny tzn. czy istnieje granica* $\lim\limits_{n\to\infty} P^n$*? Jeżeli tak to obliczyć prawdopodobieństwa ergodyczne.*

Zadanie 21. *W pudełku A jest sześć kul ponumerowanych liczbami od 1 do 6, a pudełko B jest puste. Wykonamy 1000000 rzutów kostką i po każdym rzucie przełożymy kulę o wylosowanym numerze do drugiego pudełka. Obliczyć przybliżone prawdopodobieństwo tego, że pudełko A będzie puste.*

Zadanie 22. *Szachista A jest bardzo odporny psychicznie i niezależnie od wyników poprzednich gier wygrywa kolejną partię z prawdopodobieństwem p, remisuje z prawdopodobieństwem r lub przegrywa z prawdopodobieństwem q. Szachista B jest słabszy psychicznie:*

- *jeżeli poprzednią partię przegrał to wygrywa kolejną partię z prawdopodobieństwem* $p - \varepsilon \geqslant 0$, *remisuje z prawdopodobieństwem r lub przegrywa z prawdopodobieństwem* $q + \varepsilon \leqslant 1$,

- *jeżeli poprzednią partię zremisował to wygrywa kolejną partię z prawdopodobieństwem p, remisuje z prawdopodobieństwem r lub przegrywa z prawdopodobieństwem q,*

- *jeżeli poprzednią partię wygrał to wygrywa kolejną partię z prawdopodobieństwem $p+\varepsilon \leqslant 1$, remisuje z prawdopodobieństwem r lub przegrywa z prawdopodobieństwem $q-\varepsilon \geqslant 0$.*

Załóżmy, że gracz B ostatnią partię przed turniejem zremisował.

a) Który z graczy w długim turnieju (kilkadziesiąt partii) osiągnie lepszy wynik?

b) Jak odpowiedź do a) zależy od ε?

c) Czy odpowiedź do a) zależy od wyniku ostatniej partii gracza B przed turniejem?

Zadanie 23. *Niech $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie łańcuchem Markowa, przy czym $p_{ij} = P(X_{n+1} = j|X_n = i)$. Za pomocą liczb p_{ij} opisać prawdopodobieństwa $P(X_n = j|X_{n+1} = i)$ oraz $P(X_n = j|X_{n+2} = k)$.*

Zadanie 24. *Dana jest macierz przejścia w jednym kroku łańcucha Markowa:*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{7}{8} \\ \frac{1}{16} & 0 & 0 & \frac{15}{16} \end{bmatrix}.$$

Czy ten łańcuch jest okresowy? Czy jest ergodyczny (to znaczy, czy istnieje granica $\lim P^n$)? Jeśli tak, to obliczyć rozkład stacjonarny.

Zadanie 25. * *Niech $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie łańcuchem Markowa. Czy proces $(X_{2n})_{n=1}^{\infty}$ (gdzie występują tylko zmienne o indeksach parzystych) jest łańcuchem Markowa? Jeśli odpowiedz brzmi TAK, to udowodnić to, jeśli brzmi NIE, to wskazać kontrprzykład.*

Zadanie 26. * *Ergodyczny łańcuch Markowa o dwóch stanach ma rozkład stacjonarny $(p, 1-p)$, $0 < p < 1$. Jak wygląda macierz przejścia tego łańcucha?*

Zadanie 27. *Wykaż, że relacja komunikowania się jest relacją równoważności. Jak wyglądają klasy równoważności tej relacji?*

Zadanie 28. *Określ wszystkie stany powracające i przejściowe w łańcuchu Markowa z macierzą przejścia P.*

Zadanie 29. *Wykaż, że proces Markowa jest ergodyczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje N takie, że $P^n > 0$ dla każdego $n \geqslant N$.*

Zadanie 30. *Rozważ problem ruiny gracza, w którym gracz gra tak długo, aż straci l_1 dolarów lub wygra l_2 dolarów (zaczyna z pulą 0 dolarów, w każdej rundzie wygrywa dolara i traci dolara z jednakowym prawdopodobieństwem). Udowodnij, że:*

1. *prawdopodobieństwo wygrania l_1 dolarów wynosi $\frac{l_1}{l_1+l_2}$,*
2. *wartość oczekiwana liczby rozegranych rund wynosi $l_1 l_2$.*

Zadanie 31. *Macierz prawdopodobieństw przejścia w pojedynczym kroku w łańcuchu Markowa o trzech stanach $\{E_1, E_2, E_3\}$ jest postaci*

$$\begin{bmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{bmatrix}$$

gdzie $q \in]0,1[$ oraz $p = 1-q$. Załóżmy, iż po nieograniczenie rosnącej liczbie kroków rozkład prawdopodobieństwa na przestrzeni stanów zbiega do $P(E_1) = \frac{1}{7}, P(E_2) = \frac{2}{7}$ oraz $P(E_3) = \frac{4}{7}$. Obliczyć q.

Zadanie 32. *Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *i macierz prawdopodobieństw przejścia*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.2 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rozkład początkowy (w chwili 0) jest wektorem $[0.5\ 0\ 0.5\ 0]$. *Z jakim prawdopodobieństwem łańcuch w chwili 100 znajdzie się w stanie* e_4*?*

Zadanie 33. *Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *i macierz prawdopodobieństw przejścia*

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Zakładamy, że w chwili 0 łańcuch znajduje się w stanie e_1. *Niech* T *oznacza chwilę, w której łańcuch po raz pierwszy znajdzie się w stanie* e_2. *Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej* T.

Zadanie 34. *Macierz przejścia łańcucha Markowa o stanach* $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ *jest równa:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niech $P^n(2,1)$ *będzie prawdopodobieństwem, że łańcuch po wykonaniu* n *kroków znajdzie się w stanie* E_1, *jeśli w chwili początkowej znajdował się w stanie* E_2. *Obliczyć* $\lim_{n\to\infty} P^n(2,1)$.

Zadanie 35. *Łańcuch Markowa ma dwa stany:* E_1, E_2 *i macierz przejścia*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Niech X_n *oznacza stan, w którym znajduje się łańcuch po dokonaniu* n *kroków* $(n = 0, 1, \ldots)$. *Funkcję* f *na zbiorze stanów określamy wzorem* $f(E_i) = i$ *dla* $i = 1, 2$. *Obliczyć granicę* $\lim_{n\to\infty} Cov(f(X_n), f(X_{n+1}))$.

Zadanie 36. *Łańcuch Markowa ma przestrzeń stanów* $\{E_1, E_2, E_3\}$ *i stałą macierz prawdopodobieństw przejścia*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{3}{9} \end{bmatrix}.$$

W chwili początkowej jesteśmy w stanie E_3. *Jakie jest prawdopodobieństwo przebywania w stanie* E_1 *po dwustu krokach.*

Zadanie 37. *Rozważamy łańcuch Markowa* $X_1, X_2, \ldots$ *na przestrzeni stanów* $\{1, 2, 3\}$ *o macierzy przejścia*

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ \beta & 1-\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(gdzie $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ *dla* $i, j = 1, 2, 3$*). Załóżmy, że rozkład początkowy łańcucha jest wektorem*

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\beta + 2\alpha - \alpha\beta} & \frac{\alpha}{\beta + 2\alpha - \alpha\beta} & \frac{\alpha\beta}{\beta + 2\alpha - \alpha\beta} \end{bmatrix}$$

(gdzie $\pi_i = P(X_1 = i)$ *dla* $i = 1, 2, 3$*). Obliczyć* $P(X_3 = 1 | X_1 \neq 1, X_2 \neq 1)$.

Zadanie 38. *Rozważmy łańcuch Markowa* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *o dwóch stanach: „1" i „2", który ma następującą macierz prawdopodobieństw przejścia:*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(oczywiście, element P_{ij} *stojący w* i*-tym wierszu i* j*-tej kolumnie tej macierzy oznacza* $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$*). Załóżmy ponadto, że* $P(X_0 = 1) = 1$*. Obliczyć* $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 | X_{n+1} = 2)$*.*

Zadanie 39. *Rozważmy łańcuch Markowa* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *o trzech stanach „1", „2" i „3", który ma następującą macierz prawdopodobieństw przejścia*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(oczywiście, element P_{ij} *stojący w* i*-tym wierszu i* j*-tej kolumnie tej macierzy oznacza* $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$*). Załóżmy ponadto, że* $P(X_0 = 1) = \frac{1}{6}$*,* $P(X_0 = 2) = \frac{1}{3}$ *i* $P(X_0 = 3) = \frac{1}{2}$*. Obliczyć* $\lim_{n\to\infty} P(X_{n+1} = 1 | X_n = 2)$*.*

Zadanie 40. *Rzucamy symetryczną monetą tak długo, aż w dwóch kolejnych rzutach pojawią się „reszki". Obliczyć wartość oczekiwaną liczby wykonanych rzutów.*

WSKAZÓWKA*: jeśli w rzucie numer* n *jest orzeł to przyjmijmy, że „układ jest w stanie 0". Jeśli w rzucie numer* n *jest reszka a w rzucie* $n-1$ *był orzeł, to „układ jest w stanie 1". Kończymy, gdy „układ znajdzie się w stanie 2". W ten sposób definiujemy łańcuch Markowa. Rozpatrzeć wartość oczekiwaną liczby rzutów w zależności od stanu układu.)*

Zadanie 41. *Rozważamy łańcuch Markowa* $X_1, X_2, \ldots$ *na przestrzeni stanów* $\{1, 2, 3\}$ *o macierzy przejścia*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

(gdzie $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ *dla* $i, j = 1, 2, 3$*). Załóżmy, że rozkład początkowy łańcucha jest wektorem*

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

(gdzie $\pi_i = P(X_1 = i)$ *dla* $i = 1, 2, 3$*). Obliczyć* $P(X_3 = 1 | X_2 \neq 1, X_1 \neq 1)$*.*

Zadanie 42. *Macierz prawdopodobieństw przejścia w jednym kroku dla łańcucha Markowa* $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ *o trzech stanach* $\{1, 2, 3\}$ *jest postaci*

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(oczywiście, element P_{ij} *stojący w* i*-tym wierszu i* j*-tej kolumnie tej macierzy oznacza* $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$*). Obliczyć* $\lim_{n\to\infty} Cov(X_n, X_{n+1})$*.*