

Ćwiczenia z przedmiotu PROCESY STOCHASTYCZNE

Procesy stochastyczne

kierunek: matematyka, studia II°

specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

Wartość oczekiwana i wariancja procesu stochastycznego

Definicja 1. Wartością oczekiwaną (funkcją wartości oczekiwanej) procesu stochastycznego $(X_t)_{t \in T}$ rzędu pierwszego nazywamy funkcję m_X taką, że

$$T \ni t \mapsto m_X(t) \stackrel{\text{def}}{=} E(X_t).$$

Definicja 2. Wariancją (funkcją wariancji) procesu Hilberta $(X_t)_{t \in T}$ nazywamy funkcję σ_X^2 taką, że

$$T \ni t \mapsto \sigma_X^2(X_t) \stackrel{\text{def}}{=} D^2(X_t).$$

Kowariancja i korelacja procesu stochastycznego

Definicja 3. Kowariancją (funkcją kowariancji) procesu stochastycznego Hilberta $(X_t)_{t \in T}$ nazywamy odwzorowanie $K_X: T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$\forall_{s,t \in T} K_X(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \text{cov}(X_t, X_s) \equiv E((X_t - E(X_t))(X_s - E(X_s))). \quad (1)$$

Kowariancją unormowaną (funkcją kowariancji unormowanej) procesu Hilberta $(X_t)_{t \in T}$ nazywamy odwzorowanie $\bar{K}_X: T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$\forall_{s,t \in T} \bar{K}_X(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(X_t, X_s). \quad (2)$$

Korelacją (funkcją korelacji) procesu Hilberta $(X_t)_{t \in T}$ nazywamy odwzorowanie $\tilde{K}_X: T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ takie, że

$$\forall_{s,t \in T} \tilde{K}_X(t,s) \stackrel{\text{def}}{=} E(X_t X_s). \quad (3)$$

Uwaga 1. Kowariancja, kowariancja unormowana oraz korelacja nazywane są też odpowiednio autokowariancją, autokowariancją unormowaną i autokorelacją.

Zadanie 1. Udowodnić fakty podane na wykładach.

Zadanie 2. Dany jest proces $(U_t)_{t \geq 0}$, gdzie $U_t = At^2 - 2Bt$ i (A, B) jest wektorem losowym o rozkładzie: $P(\{A = \pm 1; B = \pm 1\}) = 0,25$. Narysować dwie przykładowe trajektorie i obliczyć charakterystyki liczbowe procesu.

Zadanie 3. Dany jest proces $(U_t)_{t \geq 0}$, gdzie $U_t = t^2 - Yt$. Dla ustalonego t znaleźć rozkład U_t , jeśli Y ma rozkład jednostajny na odcinku $[0, 1]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu.

Zadanie 4. Niech $Y \sim U[0, 1]$. Dany jest proces $(U_t)_{t \geq 0}$, gdzie $U_t = Y \cos(at)$, $a \in \mathbb{R}$. Obliczyć $E[U_t]$ oraz charakterystyki liczbowe tego procesu.

Zadanie 5. Dany jest proces stochastyczny $(X_t)_{t > 0}$, gdzie $X_t = tU + V$ i U i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z jednakowym parametrem λ . Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu $(X_t)_{t > 0}$.

Zadanie 6. Dla procesu z poprzedniego zadania wyznaczyć rozkłady jednowymiarowe.

Zadanie 7. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \sigma)$, stała $b \in \mathbb{R}$. Podać gęstości jednowymiarowe i policzyć funkcje kowariancji dla procesu $(U_t)_{t>0}$, gdzie $U_t = X_t + b$.

Zadanie 8. Dany jest proces $(Z_t)_{t \geq 0}$, gdzie $Z_t = t^2 + Xt + Y$. Obliczyć charakterystyki liczbowe procesu $(Z_t)_{t \geq 0}$ jeśli X i Y są nieskorelowanymi zmiennymi losowymi.

Procesem Poissona z intensywnością $\lambda > 0$ nazywamy proces $(N_t)_{t \geq 0}$ spełniający następujące warunki:

1. $N_0 = 0$ p.n.,
2. $(N_t)_{t \geq 0}$ ma przyrosty niezależne,
3. dla każdej pary (s, t) , gdzie $t > s$ zmienna losowa $N_t - N_s$, ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda(t - s)$.

Zadanie 9. Wyznaczyć charakterystyki liczbowe procesu Poissona z intensywnością $\lambda > 0$.

Zadanie 10. Dany jest proces $(U_t)_{t \geq 0}$, gdzie $U_t = t^3 - Yt$, gdzie $Y \sim U[1, 2]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe tego procesu.

Zadanie 11. Dany jest proces $(U_t)_{t \geq 0}$, gdzie $U_t = t^2 - Yt$, gdzie $Y \sim U[2, 3]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe tego procesu.

Zadanie 12. Dany jest proces $(U_t)_{t \geq 0}$, gdzie $U_t = \cos(t) - 3tY$, gdzie $Y \sim U[3, 4]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe tego procesu.

Zadanie 13. Dany jest proces $(U_t)_{t \geq 0}$, gdzie $U_t = \sin(t) - t^2Y$, gdzie $Y \sim U[2, 3]$. Obliczyć charakterystyki liczbowe tego procesu.

Zadanie 14. Obliczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = A \sin(\omega t)$, ω - stała, A - zmienna losowa o rozkładzie $\mathcal{N}(230, 5)$.

Zadanie 15. Obliczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At^2$, gdzie A jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa $P(\{A = \pm 1\}) = 0,5$.

Zadanie 16. Obliczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At + B$, gdzie A i B są zmiennymi losowymi o parametrach $E(A) = 0$, $E(B) = 1$, $D^2(A) = 1$, $D^2(B) = 2$, $\text{cov}(A, B) = -1$.

Zadanie 17. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At^2 + Be^t$, gdzie A, B to nieskorelowane zmienne losowe o parametrach: $E(A) = 2$, $E(B) = -3$, $D^2(A) = 1$, $D^2(B) = 3$.

Zadanie 18. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At + B$, gdzie A i B to zmienne losowe o parametrach: $E(A) = 0$, $E(B) = 0$ i macierzy kowariancji $K = \begin{bmatrix} 1 & 0,4 \\ 0,4 & 1,5 \end{bmatrix}$.

Zadanie 19. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At + 1$, gdzie $A \sim U(0, 1)$. Jak wyglądają realizacje tego procesu? Które z poniższych funkcji $x_1(t) = 0,3t + 1$, $x_2(t) = -0,3t + 1$, $x_3(t) = 2t + 1$ są realizacjami tego procesu?

Zadanie 20. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At - 3$, gdzie $A \sim \mathcal{N}(3, 1)$. Jak wyglądają realizacje tego procesu?

Zadanie 21. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = \cos(t + B)$, gdzie $B \sim U(-\pi, \pi)$.

Zadanie 22. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = A \sin(t + B)$, gdzie zmienne A i B są niezależne oraz $A \sim U(-0, 5; 0, 5)$ i $B \sim U(-\pi, \pi)$.

Zadanie 23. Proces $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ma tylko 3 realizacje: $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t + 1$, $x_3(t) = t + 2$. Realizacje te są przyjmowane odpowiednio z prawdopodobieństwami: $1/2$, $1/3$; $1/6$. Wyznaczyć parametry tego procesu.

Zadanie 24. Proces $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ ma tylko 4 realizacje: $x_1(t) = t$, $x_2(t) = t + 1$, $x_3(t) = t + 2$, $x_4(t) = t - 1$. Realizacja ostatnia jest przyjmowana z prawdopodobieństwem 0,1, a pozostałe realizacje są przyjmowane z takim samym prawdopodobieństwem. Wyznaczyć parametry tego procesu.

Zadanie 25. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = Ae^t + Be^{-t}$, a A i B to zmienne losowe o parametrach: $E(A) = 0$, $E(B) = 0$, $D^2(A) = 1$, $D^2(B) = 2$, $\text{cov}(A, B) = -1$.

Zadanie 26. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = A + Bt$, a A i B to zmienne losowe o parametrach: $E(A) = -1$, $E(B) = 1$, $D^2(A) = 1$, $D^2(B) = 4$, $\rho(A, B) = -0,5$.

Zadanie 27. Wyznaczyć parametry procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = At^2 + B$, a A i B to zmienne losowe nieskorelowane. A ma rozkład wykładniczy z parametrem 1,5, a B jest zmienną losową skokową o funkcji prawdopodobieństwa: $P(\{B = \pm 1\}) = 0,5$;

Zadanie 28. Dany jest proces $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $Y_t = f(t)X_t + g(t)$, a f i g są funkcjami rzeczywistymi (nielosowymi). Wyrazić parametry procesu $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ za pomocą parametrów procesu $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

Zadanie 29. Rozważmy proces $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, gdzie $X_t = U$, a U to zmienna losowa. Obliczyć:

- wartość oczekiwaną, wariancję i kowariancję procesu, jeżeli znane są $E(U) = m$ i $D^2(U) = \sigma^2$,
- jednowymiarową gęstość i dwuwymiarową dystrybucję procesu, jeżeli dana jest gęstość φ zmiennej losowej U .

Zadanie 30. Rozważmy proces $(X_t)_{t > 0}$, gdzie $X_t = Ut + V$. Wyznaczyć:

- wartość oczekiwaną i kowariancję tego procesu, jeżeli U jest zmienną losową dyskretną o rozkładzie $P(\{U = k\}) = p_k$, $k \in \overline{1, n}$, $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n p_k = 1$, $V = 0$;
- wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję tego procesu oraz jednowymiarową gęstość procesu, jeżeli $U \sim \mathcal{N}(m; \sigma)$ oraz $V = v$ jest wielkością nielosową;
- wartość oczekiwaną, kowariancję, korelację i wariancję, jeżeli U i V są zmiennymi losowymi niezależnymi o znanych parametrach. Jaką postać ma gęstość prawdopodobieństwa procesu, jeśli znane są gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych U i V : f_U i f_V ;
- wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję tego procesu, jeżeli U i V są zmiennymi losowymi, o których wiadomo, że rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (U, V) jest rozkładem normalnym $\mathcal{N}(m_U, m_V; \sigma_U, \sigma_V, \rho)$.

Zadanie 31. Rozważmy proces stochastyczny $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$, a $X_t = \varphi(t, U)$, gdzie φ - funkcja rzeczywista nielosowa klasy $C(\mathbb{R})$, t - czas, U - zmienna losowa o znanym rozkładzie. Obliczyć wartość oczekiwaną, kowariancję i wariancję tego procesu, gdy:

- $\varphi(t, U) = \alpha(t)U + \beta(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ są funkcjami nielosowymi i znana jest gęstość zmiennej losowej U ;
- $\varphi(t, U) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(t)U_i$; φ_i - są funkcjami nielosowymi, dla $i \in \overline{1, N}$, U_i - elementy N -wymiarowej zmiennej losowej $U = (U_1, \dots, U_N)$ o znanych $E(U_i) = m_i$, i macierzy kowariancyjnej $[b_{ik}]$, gdzie $b_{ik} = \text{cov}(U_i; U_k)$ dla $i, k \in \overline{1, N}$.

Zadanie 32. Rozważmy proces stochastyczny $(X_t)_{t \in T}$ opisujący drgania sinusoidalne, który zapisuje się w postaci:

$$X_t = U_1 \cos(\Psi t) + U_2 \sin(\Psi t),$$

gdzie $U; \Phi, \Psi$ - zmienne losowe oraz $U_1 = U \sin(\Phi)$, $U_2 = U \cos(\Phi)$.

- podać jedno- i dwuwymiarową dystrybucję procesu, jeśli: $T = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$, a $U \sim U([0, 1])$, $\Psi \equiv 1$, $\Phi 0$;
- podać wartość oczekiwaną procesu, jeśli (U, Ψ) jest zmienną losową dwuwymiarową o rozkładzie jednostajnym na obszarze $[0, 1] \times [0, 1]$, a $\Phi \equiv 0$ jest wielkością nielosową;
- zbadać, czy proces jest stacjonarny, jeżeli $E(U) = 0$, $D^2(U) = \sigma_U^2$, $\Phi \sim U(0; 2\pi)$, $\Psi = a > 0$ jest wielkością nielosową, U i Φ są zmiennymi losowymi niezależnymi.