Ćwiczenia z przedmiotu Procesy stochastyczne
Procesy stochastyczne
kierunek: matematyka, studia II°
specjalność: matematyka finansowa

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. *Udowodnić fakty podane na wykładach.*

Zadanie 2. *Niech $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Udowodnij, że:*

1. $E(X^{2k+1}) = 0$ *dla każdego* $k \in \mathbb{N}$*;*
2. $E(X^{2k}) = \sigma^2(2k-1)E(X^{2k-2})$ *dla każdego* $k \in \mathbb{N}$*;*
3. $E(X^2) = \sigma^2$, $E(X^4) = 3\sigma^4$, $E(X^6) = 15\sigma^6$*;*
4. $E(X^{2k}) = (2k-1)!!\sigma^{2k}$ *dla każdego* $k \in \mathbb{N}$.

Zadanie 3. *Udowodnić, że funkcja kowariancji procesu Wienera wyraża się wzorem*

$$\forall_{t,s\in T}\ K_W(t,s) = \operatorname{cov}(W_t, W_s) = \min(t,s).$$

Zadanie 4. *Niech (W_t) będzie standardowym procesem Wienera. Udowodnij, że*

1. *dla dowolnych liczb nieujemnych t i s takich, że $s \leqslant t$ rozkłady zmiennych $W_t - W_s$ i W_{t-s} są identyczne;*
2. *dla dowolnej liczby dodatniej c rozkłady zmiennych W_{ct} i $\sqrt{c}W_t$ są identyczne.*

Zadanie 5. *Niech c będzie ustaloną liczbą dodatnią i niech ponadto*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c} W_{c^2 t}.$$

Udowodnij, że proces $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

Zadanie 6. *Niech*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} tW_{\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}.$$

Udowodnij, że proces $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

Zadanie 7. *Niech $T \geqslant 0$ będzie ustalone. Określamy proces*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ Z_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} W_t & \text{dla } t \leqslant T \\ 2W_T - W_t & \text{dla } t > T \end{cases}.$$

Udowodnij, że proces $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

Zadanie 8. *Niech T będzie ustaloną liczbą dodatnią i niech*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ V_t \stackrel{\text{def}}{=} W_{T+t} - W_T.$$

Udowodnij, że proces $(V_t)_{t\geqslant 0}$ jest procesem Wienera.

Zadanie 9. *Niech*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ B_t \stackrel{\text{def}}{=} (1+t)(W_{\frac{t}{1+t}} - \frac{t}{1+t}W_1).$$

Udoodnij, że proces $(B_t)_{t\geqslant 0}$ *jest procesem Wienera.*

Zadanie 10. *Niech*

$$\forall_{t\in[0,+\infty[}\ G_t \stackrel{\text{def}}{=} -W_t.$$

Udowodnij, że proces $(G_t)_{t\geqslant 0}$ *jest procesem Wienera.*

Zadanie 11. *Niech* a *i* b *będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że* $a < b$*, zaś* $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ *dowolnym podziałem odcinka* $[a,b]$ *tzn.* $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$*,* Δ_n *średnicą tego podziału tzn.* $\Delta_n \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n-1}(t_{i+1} - t_i)$*. Udowodnij, że*

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2\right) = b - a$$

$$E\left(\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right)^2 - (b-a)\right]^2\right) \leqslant 2(b-a)\Delta_n.$$

Zadanie 12. *Niech* a *i* b *będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że* $a < b$*,* $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ *dowolnym podziałem odcinka* $[a,b]$*, zaś* $\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha t_{i+1} + (1-\alpha)t_i$ *dla* $i = 0, 1, \dots, n-1$*, gdzie* $\alpha \in [0,1]$*. Udowodnij, że*

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-1} W_{\tau_i}\left[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}\right] \quad &= \quad \frac{1}{2}W^2(b) - \frac{1}{2}W^2(a) - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-1}[W_{t_{i+1}} - W_{t_i}]^2 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1}[W_{\tau_i} - W_{t_i}]^2 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1}[W_{t_{i+1}} - W_{\tau_i}][W_{\tau_i} - W_{t_i}].\end{aligned}$$

Zadanie 13. *Niech* a *i* b *będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że* $a < b$*,* $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ *dowolnym podziałem odcinka* $[a,b]$*, zaś* $\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha t_{i+1} + (1-\alpha)t_i$ *dla* $i = 0, 1, \dots, n-1$*, gdzie* $\alpha \in [0,1]$*. Udowodnij, że*

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1}[W_{\tau_i} - W_{t_i}]^2\right) = \alpha(b-a)$$

$$E\left(\left[\sum_{i=0}^{n-1}\left(W_{\tau_i} - W_{t_i}\right)^2 - \alpha(b-a)\right]^2\right) \leqslant 2\alpha(b-a)\Delta,$$

gdzie Δ *jest średnicą tego podziału.*

Zadanie 14. *Niech* a *i* b *będą dowolnymi dodatnimi liczbami rzeczywistymi takimi, że* $a < b$*,* $\{t_0, t_1, \dots t_n\}$ *dowolnym podziałem odcinka* $[a,b]$ *tzn.* $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$*, zaś* $\tau_i \stackrel{\text{def}}{=} \alpha t_{i+1} + (1-\alpha)t_i$ *dla* $i = 0, 1, \dots, n-1$*, gdzie* $\alpha \in [0,1]$*. Udowodnij, że*

$$E(\sum_{i=0}^{n-1}\left[W_{\tau_i} - W_{t_i}\right]\left[W_{t_{i+1}} - W_{\tau_i}\right]) = 0,$$

$$E\left(\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left[W_{\tau_i} - W_{t_i}\right]\left[W_{t_{i+1}} - W_{\tau_i}\right]\right)^2\right) \leqslant \alpha(1-\alpha)\Delta(b-a),$$

gdzie Δ *jest średnicą tego podziału.*

Zadanie 15. *Udowodnij, że* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *jest martyngałem względem naturalnej filtracji* $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$.

Zadanie 16. *Udowodnij, że* $(W_t^2)_{t\geqslant 0}$ *jest podmartyngałem, a* $(W_t^2 - t)_{t\geqslant 0}$ *martyngałem względem naturalnej filtracji* $(\mathcal{F}_t^W)_{t\geqslant 0}$.

Zadanie 17. *Udowodnij, że* $E\left(\exp(\lambda Y)\right) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$ *dla* $Y \in \mathcal{N}(0,1)$.

Zadanie 18. *Udowodnij, że jeśli* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *jest procesem Wienera względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, *to dla dowolnej liczby rzeczywistej* λ *proces* $\left(\exp\left(\lambda W_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)_t\right)_{t\geqslant 0}$ *jest* $(\mathcal{F}_t)_t$*-martyngałem.*

Zadanie 19. *Sprawdzić, czy* $2W_t - W_s$ *oraz* $W_t - 2W_s$ *są niezależne od* $W_s - W_r$, *gdzie* $0 \leqslant r < s < t$, *a* $(W_t)_{t\geqslant 0}$ *jest standardowym procesem Wienera.*

Uzupełnienie wykładu

Zadanie 20 (Fakt konieczny do dowodu twierdzenia 1 z wykładu 09)**.** *Niech* $(M_t)_{t\geqslant 0}$ *będzie* $(\mathcal{F}_t)$*-nadmartyngałem, dla którego istnieje całkowalna zmienna losowa* ξ *taka, że dla dowolnego* $s \geqslant 0$ *zachodzi nierówność* $M_s \geqslant E(\xi|\mathcal{F}_s)$ *p.n.. Niech* $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie nierosnącym ciągiem momentów stopu względem filtracji* $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. *Udowodnij, że rodzina zmiennych losowych* $(M_{\tau_n})_n$ *jest jednostajnie całkowalna.*

Zadanie 21 (Twierdzenie 1 z wykładu 09 jest uogólnieniem tego twierdzenia)**.** *Niech* $(M_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie* $(\mathcal{F}_n)$*-nadmartyngałem ograniczonym z dołu przez pewien* $(\mathcal{F}_n)$*-martyngał prawostronnie domknięty. Korzystając m.in. z poprzedniego zadania udowodnij, że jeśli* τ *i* σ *są momentami stopu względem tej samej filtracji takimi, że* $P(\{\sigma \leqslant \tau\}) = 1$, *to zachodzi nierówność*

$$M_\sigma \geqslant E(M_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \quad \textit{p.n.}.$$

Zadanie 22 (Twierdzenie 2 z wykładu 09 jest uogólnieniem tego twierdzenia)**.** *Niech* $(M_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie prawostronnie domkniętym* $(\mathcal{F}_n)$*-martyngałem, zaś* τ *i* σ *niech będą momentami stopu względem filtracji* $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ *takimi, że* $P(\{\sigma \leqslant \tau\}) = 1$. *Wtedy*

$$M_\sigma = E(M_\tau|\mathcal{F}_\sigma) \quad (\textit{p.n.}).$$