Metody probabilistyczne i statystyka - wykład pierwszy[1]

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku

wersja z 28 lutego 2020

Spis treści

Kontakt

Strona internetowa

http://math.uwb.edu.pl/%7Ekotowicz/w1920l.html

Konsultacje:

https://usosweb.uwb.edu.pl/kontroler.php?_action=katalog2/osob

Sylabus

Sylabus

https://usosweb.uwb.edu.pl/kontroler.php?_action=katalog2/prze

Sylabus

https://usosweb.uwb.edu.pl/kontroler.php?_action=katalog2/prze

Zasady zaliczenia przedmiotu

https://usosweb.uwb.edu.pl/kontroler.php?_action=katalog2/prze

Sylabus

https://usosweb.uwb.edu.pl/kontroler.php?_action=katalog2/prze

Zasady zaliczenia przedmiotu

https://usosweb.uwb.edu.pl/kontroler.php?_action=katalog2/prze

Zasady zaliczenia ćwiczeń

https://usosweb.uwb.edu.pl/kontroler.php?_action=katalog2/prze

Sylabus

https://usosweb.uwb.edu.pl/kontroler.php?_action=katalog2/prze

Zasady zaliczenia przedmiotu

https://usosweb.uwb.edu.pl/kontroler.php?_action=katalog2/prze

Zasady zaliczenia ćwiczeń

https://usosweb.uwb.edu.pl/kontroler.php?_action=katalog2/prze

Zasady zaliczenia laboratorium

https://usosweb.uwb.edu.pl/kontroler.php?_action=katalog2/prze

Spis treści

Podstawowe pytania

Załóżmy, że mamy pewien zbiór. Liczy on dokładnie n elementów. Losujemy z tego zbioru pewną liczbę elementów. Powstają przy tym następujące pytania:

1. Czy wartości elementów, które wylosowaliśmy mogą się powtarzać?

Podstawowe pytania

Załóżmy, że mamy pewien zbiór. Liczy on dokładnie n elementów. Losujemy z tego zbioru pewną liczbę elementów. Powstają przy tym następujące pytania:

1. Czy wartości elementów, które wylosowaliśmy mogą się powtarzać?
2. Czy ważna jest kolejność wylosowanych elementów?

Podstawowe pytania

Załóżmy, że mamy pewien zbiór. Liczy on dokładnie n elementów. Losujemy z tego zbioru pewną liczbę elementów. Powstają przy tym następujące pytania:

1. Czy wartości elementów, które wylosowaliśmy mogą się powtarzać?
2. Czy ważna jest kolejność wylosowanych elementów?
3. Czy muszę wybrać wszystkie elementy zbioru?

Czasami odpowiedź już na dwa pytania wystarczy na określenie, jaki schemat należy wybrać.

Jednak najczęściej trzeba odpowiedzieć na trzy pytania.

Pytanie 1

Pod pierwszym pytaniem kryją się dwa modele sytuacji:

1. elementy nie mogą się powtarzać,

Pytanie 1

Pod pierwszym pytaniem kryją się dwa modele sytuacji:

1. elementy nie mogą się powtarzać,
2. elementy mogą się powtarzać. I tu mamy

Pytanie 1

Pod pierwszym pytaniem kryją się dwa modele sytuacji:

1. elementy nie mogą się powtarzać,
2. elementy mogą się powtarzać. I tu mamy

- w zbiorze, z którego losujemy są elementy o tej samej wartości,

Pytanie 1

Pod pierwszym pytaniem kryją się dwa modele sytuacji:

1. elementy nie mogą się powtarzać,
2. elementy mogą się powtarzać. I tu mamy

- w zbiorze, z którego losujemy są elementy o tej samej wartości,
- losujemy pojedynczo z naszego zbioru, zapisujemy wartość wylosowanego elementu i zwracamy go do zbioru.

O pierwszym modelu będziemy mówili, że jest modelem *bez powtórzeń* natomiast o drugim, że jest *z powtórzeniami.*

Pytanie 2

Pytanie drugie odpowiada modelem:

1. kolejność jest ważna, czyli losujemy pojedynczo po elemencie ze zbioru i zapisujemy wartość wylosowanego elementu oraz numer losowania,

Pytanie 2

Pytanie drugie odpowiada modelem:

1. kolejność jest ważna, czyli losujemy pojedynczo po elemencie ze zbioru i zapisujemy wartość wylosowanego elementu oraz numer losowania,
2. kolejność nie jest ważna. To odpowiada sytuacjom:

Pytanie 2

Pytanie drugie odpowiada modelem:

1. kolejność jest ważna, czyli losujemy pojedynczo po elemencie ze zbioru i zapisujemy wartość wylosowanego elementu oraz numer losowania,
2. kolejność nie jest ważna. To odpowiada sytuacjom:

- losujemy za jednym razem pewną ilość elementów,

Pytanie 2

Pytanie drugie odpowiada modelem:

1. kolejność jest ważna, czyli losujemy pojedynczo po elemencie ze zbioru i zapisujemy wartość wylosowanego elementu oraz numer losowania,
2. kolejność nie jest ważna. To odpowiada sytuacjom:

- losujemy za jednym razem pewną ilość elementów,
- losujemy pojedynczo po jednym elemencie, jednak pomijam informację dotyczącą numeru losowania.

Tutaj będziemy mieli w pierwszym przypadku modele *permutacji* oraz *wariacji.* Natomiast w drugim model *kombinacji.*

Pytanie 3

W ostatnim z pytań budujemy dwa modele:

1. musimy wylosować wszystkie elementy,

Pytanie 3

W ostatnim z pytań budujemy dwa modele:

1. musimy wylosować wszystkie elementy,
2. nie musimy wybierać wszystkich elementów.

W pierwszym przypadku mamy model *permutacji*, a w drugim *kombinacji* lub *wariacji.*

Zauważmy, że po zadaniu pierwszego pytania odpowiedź negatywna na drugie (odpowiednio pozytywna na trzecie pytanie) eliminuje konieczność stawiania pytania trzeciego (odpowiednio drugiego). Tak więc warto zacząć od stawiania pytania trzeciego. Następnie, jeżeli odpowiedź jest pozytywna, przechodzimy od razu do pytania pierwszego. W przeciwnym wypadku zadajemy pytanie drugie i dopiero na końcu pierwsze.

Odpowiedzi na pytania	Rodzaj modelu
Ad 3. TAK; Ad 1. TAK; Ad 2. niepotrzebne	permutacje z powtórzeniami
Ad 3. TAK; Ad 1. NIE; Ad 2. niepotrzebne	permutacje bez powtórzeń
Ad 3. NIE; Ad 2. TAK;	wariacje
Ad 3. NIE; Ad 2. TAK; Ad 1. TAK	wariacje z powtórzeniami
Ad 3. NIE; Ad 2. TAK; Ad 1. NIE	wariacje bez powtórzeń
Ad 3. NIE; Ad 2. NIE;	kombinacje
Ad 3. NIE; Ad 2. NIE; Ad 1. TAK	kombinacje z powtórzeniami
Ad 3. NIE; Ad 2. NIE; Ad 1. NIE	kombinacje bez powtórzeń

Pewne uproszczenia jakie mogą pomóc

1. Permutacje najłatwiej utożsamiać z budowaniem *słów* n-literowych z liter, które mogą lub nie mogą się powtarzać. Można też myśleć o układaniu wież z klocków.

Pewne uproszczenia jakie mogą pomóc

1. Permutacje najłatwiej utożsamiać z budowaniem *słów* n-literowych z liter, które mogą lub nie mogą się powtarzać. Można też myśleć o układaniu wież z klocków.
2. Kombinacje z powtórzeniami najlepiej utożsamić z wkładaniem nierozróżnialnych kul (k kul) do ponumerowanych urn (n urn).

Pewne uproszczenia jakie mogą pomóc

1. Permutacje najłatwiej utożsamiać z budowaniem *słów* n-literowych z liter, które mogą lub nie mogą się powtarzać. Można też myśleć o układaniu wież z klocków.
2. Kombinacje z powtórzeniami najlepiej utożsamić z wkładaniem nierozróżnialnych kul (k kul) do ponumerowanych urn (n urn).
3. Kombinacje bez powtórzeń można utożsamić z wybieraniem k miejsc w ciągu n elementowym lub ewentualnie z liczbą podzbiorów k elementowych zbioru n elementowego.

Kombinatoryka. I

Rozważamy zbiór n elementowych.

Nazwa	Wzór	Założenia
permutacja bez powtórzeń	$n!$	brak
permutacja z powtórzeniami	$\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}$	r klas, $1 \leqslant r \leqslant n$, i-ta klasa liczy k_i elementów i $k_1 + \ldots k_r = n$
wariacja bez powtórzeń k elementowa	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$0 \leqslant k \leqslant n$
wariacja z powtórzeniami k elementowa	n^k	brak

Kombinatoryka. II

Nazwa	Wzór	Założenia
kombinacja bez powtórzeń k elementowa	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$0 \leqslant k \leqslant n$
kombinacja z powtórzeniami k elementowa	$\binom{n-1+k}{k}$	brak

Spis treści

Częstość zaobserwowania zjawiska/zdarzenia.

Częstość zaobserwowania zjawiska/zdarzenia.

W języku polskim

https://pl.wikipedia.org/wiki/Cz%C4%99sto%C5%9B%C4%87_(matemat

Częstość zaobserwowania zjawiska/zdarzenia.

W języku polskim

https://pl.wikipedia.org/wiki/Cz%C4%99sto%C5%9B%C4%87_(matemat

W języku angielskim

https://en.wikipedia.org/wiki/Empirical_probability

Spis treści

Wprowadzenie

Przyjmowana aksjomatyka prawdopodobieństwa (zwana aksjomatami Kołmogorowa) została podana w 1933 roku przez Andrieja Kołmogorowa.

https://pl.wikipedia.org/wiki/Andriej_Ko%C5%82mogorow

http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kolmogorov.ht

https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=10480&fChr

σ-ciało podzbiorów i jego własności. I

Niech $\Omega \neq \emptyset$ oraz $\Sigma \subset 2^{\Omega}$.

Definicja 1

Rodzinę zbiorów Σ nazywamy σ-ciałem podzbiorów Ω wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{aligned} \Omega &\in \Sigma & (1)\\ \forall_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\Sigma} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &\in \Sigma, & (2)\\ \forall_{A,B\in\Sigma} A \setminus B &\in \Sigma. & (3) \end{aligned}$$

Uwaga 1

σ-ciało jest to rodzina podzbiorów zamknięta na przeliczalną ilość działań teoriomnogościowych (sumy, iloczynu, różnicy).

σ-ciało podzbiorów i jego własności. II

Wniosek 1

Zachodzą następujące własności dla σ-ciała

$$\emptyset \in \Sigma \tag{4}$$

$$\forall_{A \in \Sigma} A' \in \Sigma \tag{5}$$

$$\forall_{A,B \in \Sigma} A \cup B \in \Sigma \tag{6}$$

$$\forall_{A,B \in \Sigma} A \cap B \in \Sigma \tag{7}$$

$$\forall_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma. \tag{8}$$

Przykład 1

Najprostszymi σ-ciałami są rodziny $\{\emptyset, \Omega\}$i 2^{Ω}, czyli zbiór wszystkich podzbiorów zbioru Ω.

Prawdopodobieństwo (miara probabilistyczna).

Definicja 2

Funkcję $P\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ nazywamy miarą probabilistyczną wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{A\in\Sigma}\ P(A) \geqslant 0 \tag{9}$$

$$\forall_{(A_n)_{n\geqslant 1}\subset\Sigma,\textit{parami rozłączny}} \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \tag{10}$$

$$P(\Omega) = 1. \tag{11}$$

Uwaga 2

Własność (9), to nieujemność miary miary, zaś własność (10) to σ-addytywność (przeliczalna addytywność) miary.

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Definicja 3

Niech Ω będzie zbiorem skończonym, a A jego podzbiorem. Prawdopodobieństwem klasycznym zdarzenia A nazywamy wielkość

$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{12}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę elementów zbioru A.

Własności prawdopodobieństwa. I

Definicja 4

Strukturę (Ω, Σ, P) *nazywamy przestrzenią probabilistyczną.*

Uwaga 3

Każdy zbiór Σ *- mierzalny nazywamy zdarzeniem, a* $\{\omega\}$*, gdzie* $\omega \in \Omega$*, zdarzeniem elementarnym.*

Własności prawdopodobieństwa. II

$$P(\emptyset) = 0 \tag{13}$$

$$\forall_{A,B\in\Sigma} A \subset B \Rightarrow P(A) \leqslant P(B) \tag{14}$$

$$\forall_{A,B\in\Sigma} A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) \leqslant P(B) - P(A) \tag{15}$$

$$\forall_{A\in\Sigma} P(A') = 1 - P(A) \tag{16}$$

$$\forall_{A,B\in\Sigma} P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{17}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{\{A_1,\ldots,A_n\}\subset\Sigma} P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_i\leqslant n} P\left(\bigcap_{l=1}^{i} A_{k_l}\right) \tag{18}$$

$$\forall_{(A_n)_{n\geqslant 1}\subset\Sigma} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n). \tag{19}$$

Własności prawdopodobieństwa. III

$$\forall_{(A_n)_{n\geqslant 1}\subset\Sigma}(A_n)_{n\geqslant 1}\text{- wstępujący } \Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)(20)$$

$$\forall_{(A_n)_{n\geqslant 1}\subset\Sigma}(A_n)_{n\geqslant 1}\text{- zstępujący } \Rightarrow P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).(21)$$

Uwaga 4

Równość (18) nazywamy prawem włączania i wyłączania, zaś równości (20) i (21) ciągłości prawdopodobieństwa odpowiednio z dołu i góry.

Przykład 2

Niech $\Omega = \{\omega_O, \omega_R\}, \Sigma = 2^\Omega$ *oraz* P *będzie określone następująco:* $P(\emptyset) = 0, P(\{\omega_O\}) = P(\{\omega_R\}) = \frac{1}{2}$. *Wówczas* $(\{\omega_O, \omega_R\}, \Sigma, P)$ *jest przestrzenią probabilistyczną.*

Spis treści

Prawdopodobieństwo warunkowe.

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 5

Niech $A, B \in \Sigma$. Załóżmy, że $P(B) \neq 0$. Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B (piszemy $P(A/B)$) nazywamy liczbę

$$P(A/B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{22}$$

Układ zupełny zdarzeń.

Niech $\operatorname{card} \mathfrak{I} \leqslant \aleph_0$[2].

Definicja 6

Co najwyżej przeliczalną rodzinę zbiorów $\{A_i : i \in \mathfrak{I}\} \subset \Sigma$ nazywamy układem zupełnym (zdarzeń) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigcup_{i \in \mathfrak{I}} A_i = \Omega \tag{23}$$

$$\forall_{i,j \in \mathfrak{I}} i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset \tag{24}$$

$$\forall_{i \in \mathfrak{I}} P(A_i) \neq 0. \tag{25}$$

Uwaga 5

Zbiór $\mathfrak{I}$ nazywamy zbiorem indeksów rodziny $\{A_i : i \in \mathfrak{I}\}$.

[2] Symbol $\operatorname{card} \mathfrak{I}$ oznacza moc zbioru $\mathfrak{I}$ (liczbę kardynalną), a $\aleph_0$ to liczba kardynalna odpowiadająca mocy zbioru liczb naturalnych

Prawdopodobieństwo całkowite i wzór Bayesa.

Twierdzenie 1 (Prawdopodobieństwo całkowite)

Niech $\{H_i : i \in \mathfrak{I}\} \subset \Sigma$ *będzie układem zupełnym. Wówczas dla dowolnego zdarzenia* A *zachodzi równość*

$$P(A) = \sum_{i \in \mathfrak{I}} P(A/H_i)P(H_i). \tag{26}$$

Twierdzenie 2 (Wzór Bayesa)

Niech $\{H_i : i \in \mathfrak{I}\} \subset \Sigma$ *będzie układem zupełnym. Wówczas dla dowolnego zdarzenia* A *o niezerowym prawdopodobieństwie i dowolnego* $i_0 \in \mathfrak{I}$ *zachodzi równość*

$$P(H_{i_0}/A) = \frac{P(A/H_{i_0})P(H_{i_0})}{\sum_{i \in \mathfrak{I}} P(A/H_i)P(H_i)}. \tag{27}$$

Spis treści

Niezależność dwóch zdarzeń

Definicja 7

Mówimy, że zdarzenia A, B z tej przestrzeni są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{28}$$

Stwierdzenie 1

Niech $A, B \in \Sigma$ oraz $P(B) \neq 0$. Zdarzenia A, B są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(A/B) = P(A). \tag{29}$$

Niezależność zdarzeń. I

Dany jest układ zdarzeń $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \Sigma$.

Definicja 8

Mówimy, że zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{1 \leqslant k \leqslant n} \forall_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} P\left(\bigcap_{l=1}^{k} A_{i_l}\right) = \prod_{l=1}^{k} P(A_{i_l}). \tag{30}$$

Definicja 9

Mówimy, że zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są parami niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P\left(A_i \cap A_j\right) = P(A_i) \cdot P(A_j). \tag{31}$$

Niezależność zdarzeń. II

Wniosek 2

Jeżeli zdarzenia są niezależne, to są niezależne parami.

Definicja 10

Mówimy, że zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne zespołowo wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P(A_k). \tag{32}$$

Uwaga 6

W przypadku $n = 2$ wszystkie pojęcia przez nas wprowadzone są identyczne.

Niezależność zdarzeń. III

Wniosek 3

Jeżeli zdarzenia są niezależne, to są niezależne zespołowo.

Własności zdarzeń niezależnych. I

Przykład 3

Na czworościennej kostce (czworościan foremny) napisano na trzech ścianach dokładnie jeden raz jedną z liczb 1, 2 i 3, zaś na czwartej ścianie je wszystkie. Określamy zdarzenia A_i *- wyrzucono liczbę* i*. Zdarzenia* A_1, A_2, A_3 *są parami niezależne, ale nie są niezależne zespołowo.*

Twierdzenie 3

Istnieje układ zdarzeń parami niezależnych, który nie jest układem zdarzeń niezależnych, a więc i nie jest układem zdarzeń niezależnych zespołowo.

Twierdzenie 4

Zdarzenia rozłączne A *i* B *są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy* $P(A) = 0$ *lub* $P(B) = 0$.

Własności zdarzeń niezależnych. II

Twierdzenie 5

Niech $\operatorname{card}\mathfrak{I} \leqslant \aleph_0$. *Niech* $A \in \Sigma$ *oraz* $\{A_i : i \in \mathfrak{I}\} \subset \Sigma$ *i zdarzenia* $\{A_i : i \in \mathfrak{I}\}$ *są parami rozłączne. Wtedy, o ile dla dowolnego* $i \in \mathfrak{I}$ *niezależne są zdarzenia* A *i* A_i, *to niezależne są zdarzenia* $A, \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} A_i$.

Twierdzenie 6

Oznaczymy $A^0 \equiv A$ *oraz* $A^1 \equiv A'$. *Następujące warunki są równoważne*

$$A_1, \ldots, A_n \text{niezależne} \tag{33}$$

$$\forall_{\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\} \in \{1,\ldots,n\}^{\{0,1\}}} B_1 = A_1^{\varepsilon_1}, \ldots, B_n = A_n^{\varepsilon_n} \text{niezależne} \tag{34}$$

$$\forall_{\{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n\} \in \{1,\ldots,n\}^{\{0,1\}}} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^{\varepsilon_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k^{\varepsilon_k}\right). \tag{35}$$

Własności zdarzeń niezależnych. III

Wniosek 4

Niech $\{A_1, \ldots, A_n\} \subset \Sigma$ *będzie układem zdarzeń niezależnych. Wówczas*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k'\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - P(A_k)) . \tag{36}$$

Uogólnienia niezależności zdarzeń. I

Definicja 11

Dany jest układ zdarzeń $\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \Sigma$. *Mówimy, że układ zdarzeń jest niezależny (inaczej układ zdarzeń* $\{A_n : n \geqslant 1\}$ *jest układem zdarzeń niezależnych) wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny skończony jego podukład jest układem zdarzeń niezależnych.*

Definicja 12

Dany jest układ zdarzeń $\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \Sigma$. *Mówimy, że układ zdarzeń jest układem zdarzeń parami niezależnych wtedy i tylko wtedy, gdy dowolny zdarzeń o różnych indeksach są one niezależne.*

Uogólnienia niezależności zdarzeń. II

Definicja 13

Niech $\{\Xi_i : i \in \mathfrak{I}\}$ *będzie rodziną zbiorów zdarzeń tzn. każde* Ξ_i *jest zbiorem zdarzeń.* Ξ_i *dla* $i \in \mathfrak{I}$ *są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\mathfrak{J}\subset\mathfrak{I}}\forall_{j\in\mathfrak{J}}\forall_{A_j\in\Xi_j}\,\mathrm{card}\,\mathfrak{J} < \aleph_0 \Rightarrow P(\bigcap_{j\in\mathfrak{J}} A_j) = \prod_{j\in\mathfrak{J}} P(A_j). \tag{37}$$