Metody probabilistyczne i statystyka - wykład drugi[1]

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku

wersja z 28 lutego 2020

Spis treści

Niech (Ω, Σ, P) będzie ustaloną przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 1

Mówimy, że zdarzenia A, B są zależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B). \tag{1}$$

Inaczej mówimy, że nie są niezależne.

Definicja 2

Niech $A, B \in \Sigma$ oraz $P(A), P(B) \in]0, 1[$. Współczynnikiem korelacji zdarzeń A i B nazywamy liczbę wyrażoną wzorem

$$\rho(A, B) := \frac{P(A \cap B) - P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(A')P(B)P(B')}}. \tag{2}$$

Twierdzenie 1

Niech $A, B \in \Sigma$ *oraz* $P(A), P(B) \in]0,1[$. *Wtedy*

$$\rho(A,B) = \rho(B,A) \tag{3}$$

$$\rho(A',B) = \rho(A,B') = -\rho(A,B) \tag{4}$$

$$\rho(A',B') = \rho(A,B) \tag{5}$$

$$\rho(A,B) = 0 \Leftrightarrow A, B \text{ niezależne} \tag{6}$$

$$\rho(A,A) = 1 \wedge \rho(A,A') = -1 \tag{7}$$

$$\rho(A,B) = 1 \Rightarrow P(A) = P(A \cap B) = P(B)\ (\equiv P(A \div B) = 0) \tag{8}$$

$$\rho(A,B) = -1 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \tag{9}$$

$$|\rho(A,B)| \leqslant 1 \tag{10}$$

Spis treści

Prawdopodobieństwo geometryczne

Definicja 3

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}$ zbiorem, dla którego można policzyć długość i długość Ω jest skończona (oznaczymy ją $\mu(\Omega)$), a Σ ustalonym σ-ciałem jego podzbiorów takim, że dla każdego zbioru z tej rodziny można obliczyć długość. Wtedy funkcja $P\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$P(A) := \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}, \tag{11}$$

gdzie $\mu(A)$ oznacza długość zbioru A, jest miarą probabilistyczną.

Uwaga 1

1. *Można rozważać podzbiór $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ i odpowiednio pole, czy objętość.*
2. *Prawdopodobieństwo tak określone nazywamy prawdopodobieństwem geometrycznym.*

Joseph Bertrand

Joseph Louis François Bertrand (ur. 11 marca 1822 w Paryżu, zm. 5 kwietnia 1900 w Paryżu) – matematyk i ekonomista francuski.

https://pl.wikipedia.org/wiki/Joseph_Louis_Fran%C3%A7ois_Bertr

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bertrand.h

Paradoks Bertranda

Przykład 1

Dane jest koło o promieniu $r > 0$, Na kole wybieramy losowo cięciwę. Jakie jest prawdopodobieństwo, że będzie miała ona długość większą od długości boku trójkąta równobocznego wpisanego w brzeg tego koła (okrąg) ?
Rozważyć następujące wybory:

i. *położenie środka cięciwy na kole,*
ii. *ustalony kierunek cięciwy,*
iii. *ustalony jeden z końców cięciwy.*

Spis treści

Zagadnienie Bernoulliego. I

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną. Istniej miara probabilistyczna – prawdopodobieństwo w przestrzeni produktowej $(\Omega^n, \sigma\mathfrak{a}(\Sigma^n), P_n)$, gdzie Ω^n jest n-krotnym iloczynem kartezjańskim zbioru Ω, zaś $\sigma\mathfrak{a}(\Sigma^n)$ jest najmniejszym σ - ciałem podzbiorów Ω^n zawierającym Σ^n.

Twierdzenie 2

Jeżeli przeprowadzono n jednakowych i niezależnych prób, gdzie zdarzenie A mogło pojawić się w pojedynczej próbie z prawdopodobieństwem p, to prawdopodobieństwo, że zaszło ono dokładnie w k próbach ($k \in \overline{0, n}$) wynosi

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{12}$$

Zagadnienie Bernoulliego. II

Uwaga 2

n identycznych prób będziemy nazywać serią (długości n).

Uogólniony zagadnienie Bernoulliego

Twierdzenie 3

Jeżeli przeprowadzono n jednakowych i niezależnych prób, gdzie w pojedynczej próbie mogły pojawić się dokładnie jedno ze zdarzeń $A_1, \ldots, A_r$ *z prawdopodobieństwem równym odpowiednio* $p_1, \ldots p_r$, *gdzie* $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$, *to prawdopodobieństwo, że każde zdarzenie* A_i *zaszło dokładnie* n_i *- razy* ($n_i \in \overline{0, n}$), *gdzie* $i = 1, \ldots, r$ *i* $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i = n$ *wynosi*

$$\frac{n!}{n_1! \cdots n_r!} \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i}. \tag{13}$$

Zagadnienie Poissona

Twierdzenie 4

Przeprowadzamy ciąg serii doświadczeń według schematu Bernoulliego tak, aby w poszczególnych seriach liczb doświadczeń wzrastała do nieskończoności, a jednocześnie prawdopodobieństwo sukcesu p_n *dążyło do zera, przy czym* $np_n = \lambda$ *było stałe. Jeżeli oznaczymy przez* $A_{n,k}$ *zdarzenie, że w* n *- tej serii otrzymano dokładnie* k *sukcesów, to*

$$\lim_{n\to\infty} P(A_{n,k}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{14}$$

Zagadnienie Pascala

Twierdzenie 5

Jeżeli przeprowadzono n prób według schematu Bernoulliego, to prawdopodobieństwo, że do uzyskania k sukcesów będzie potrzebnych dokładnie n prób wynosi

$$\binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{15}$$

Schemat urnowy Pólya

Twierdzenie 6

Z urny o b białych i c czarnych kulach losujemy jedną kulę, którą zwracamy do urny wykonując jeszcze dokładnie jedną z czynności

1. *dodajemy do urny s kul tego samego koloru, co wylosowana kula,*
2. *wyjmujemy z urny s kul tego samego koloru, co wylosowana kula,*
3. *nic nie robimy.*

Obliczyć prawdopodobieństwo, że postępując tak n razy wylosujemy dokładnie k razy kulę białą. Kiedy rozwiązanie ma niezerowe prawdopodobieństwo (dla jakich liczb b, c, s, n i k)?

Spis treści

Pojęcie zmiennej losowej

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną.

Definicja 4

Jednowymiarową zmienną losową nazywamy każde odwzorowanie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ takie, że

$$\forall_{a \in \mathbb{R}} X^{-1}(]-\infty, a]) \in \Sigma. \tag{16}$$

Uwaga 3

1. *Zmienna losowa, to nie zmienna, ale funkcja.*
2. *W przypadku, gdy zbiór Ω jest przeliczalny, to każda funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ jest zmienną losową.*

Rodzina zbiorów borelowskich w $\mathbb{R}$.

Definicja 5

Najmniejsze w sensie zawierania się σ-ciało zwierające wszystkie przedziały domknięte $]-\infty, a]$, gdzie a jest dowolną liczbą rzeczywistą nazywamy rodziną zbiorów borelowskich $\mathbb{R}$ i oznaczamy $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Definicja zmiennej losowej raz jeszcze.

Uwaga 4

Mając rodzinę zbiorów borelowskich zmienną losową możemy zdefiniować następująco.

Definicja 6

Jednowymiarową zmienną losową nazywamy każde odwzorowanie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *takie, że*

$$\forall_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\, X^{-1}(B) \in \Sigma. \tag{17}$$

Rozkład prawdopodobieństwa. I

Definicja 7

Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej X *nazywamy indukowane odwzorowanie* $\mu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *takie, że*

$$\forall_{B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}\ \mu(B) := P(X^{-1}(B)), \tag{18}$$

które jest nieujemny, przeliczalnie addytywne oraz spełnia warunek $\mu(\mathbb{R}) = 1$.

Uwaga 5

Często zamiast mówić o konkretnej zmiennej losowej będziemy mówili o rozkładach prawdopodobieństwa.

Rozkład prawdopodobieństwa. II

Definicja 8

Mówimy, że $\nu\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *jest rozkładem prawdopodobieństwa na* $\mathbb{R}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \nu)$ *jest przestrzenią probabilistyczną.*

Spis treści

Pojęcie dystrybuanty

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną i X będzie jednowymiarową zmienną losową określoną na tej przestrzeni.

Uwaga 6

Będziemy używać następującego oznaczenia

$$\{X \leqslant t\} \equiv \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant t\}.$$

Definicja 9

Dystrybuantą jednowymiarowej zmienne losowej X nazywamy funkcję $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) := P(\{X \leqslant t\}) \equiv P\left(X^{-1}(]-\infty, t])\right). \tag{19}$$

Własności dystrybuanty.

Twierdzenie 7

Niech F będzie dystrybuantą jednowymiarowej zmiennej losowej X. Wówczas

1. *F jest funkcją niemalejącą.*
2. *F jest funkcją prawostronnie ciągłą.*
3. $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$
4. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$

Twierdzenie 8

Jeżeli funkcja $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki (1)– (4) twierdzenia 7, to jest dystrybuantą pewnego rozkładu.

Dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa

Definicja 10

Dystrybuantą rozkładu prawdopodobieństwa μ *na* $\mathbb{R}$ *nazywamy funkcję* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *określoną wzorem*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto F(t) := \mu(]-\infty, t]). \tag{20}$$

Spis treści

Funkcja mierzalna i całkowalna w sensie Lebesgue'a

Definicja 11

Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy mierzalna w sensie Lebesgue'a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} f^{-1}(B) \in \Sigma_L, \tag{21}$$

gdzie Σ_L jest σ - ciałem zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a tzn. takich, "dla których możemy zmierzyć ich długość".

Definicja 12

Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mierzalna w sensie Lebesgue'a jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\int_{\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \tag{22}$$

Pojęcie ciągłej i dyskretnej zmiennej losowej. I

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną i X będzie jednowymiarową zmienną losową określoną na tej przestrzeni.

Definicja 13

Niech F będzie dystrybuantą zmiennej losowej X.
Mówimy, że zmienna losowa X ma rozkład ciągły wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja mierzalna w sensie Lebesgue'a i całkowalna $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że

$$\forall_{t \in \mathbb{R}} F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(r) dr. \tag{23}$$

Funkcję f nazywamy gęstością zmiennej losowej.

Pojęcie ciągłej i dyskretnej zmiennej losowej. II

Definicja 14

Zmienną losową X nazywamy dyskretną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje co najwyżej przeliczalny zbiór $S \subset \mathbb{R}$ taki, że $P(\{X \in S\}) = 1$.

Pojęcie ciągłego i dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa. I

Uwaga 7

Analogicznie jak dla zmiennych losowych określamy rozkłady prawdopodobieństwa ciągłe i dyskretne.

Definicja 15

Niech μ będzie rozkładem prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$ o dystrybuancie F. Jeżeli istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mierzalna w sensie miary μ i całkowalna względem tej miary taka, że

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\mu(dx), \tag{24}$$

to rozkład prawdopodobieństwa nazywamy ciągłym.
Funkcje f nazywamy gęstością rozkładu.

Pojęcie ciągłego i dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa. II

Uwaga 8

Należy podkreślić, że całka występująca we wzorze 24, to nie jest całka liczona tylko względem zmiennej x, ale względem miary μ.

Definicja 16

Rozkład prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}$ nazywamy dyskretnym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór co najwyżej przeliczalny $S \subset \mathbb{R}$ taki, że $\mu(S) = 1$.

Przykłady rozkładów dyskretnych. I

Definicja 17

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną, zaś X będzie dyskretną jednowymiarową zmienną losową. Mówimy, że zbiór W_X jest zbiorem wartości zmiennej losowej X wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{A \subset \mathbb{R}} \quad A \cap W_X = \emptyset \Rightarrow P\left(\{\omega : X(\omega) \in A\}\right) = 0 \tag{25}$$

$$\forall_{x \in W_X} \quad P\left(\{\omega : X(\omega) = x\}\right) > 0. \tag{26}$$

Uwaga 9

Podobnie można zdefiniować zbiór wartości rozkładu dyskretnego.

Przykłady rozkładów dyskretnych. II

Uwaga 10

Rozkład dyskretny wyznaczają jednoznacznie zbiór wartości oraz funkcja prawdopodobieństwa, czyli prawdopodobieństwa przypisane tym wartościom.

Przykład 2 (Rozkład jednopunktowy)

$$W_X := \{x_0\} \;\; i \; P(\{\omega : X(\omega) = x_0\}) = 1. \tag{27}$$

Oznaczenie $\delta(x_0)$.

Przykłady rozkładów dyskretnych. III

Przykład 3 (Rozkład dwupunktowy)

Niech $p \in]0,1[$*.*

$$W_X := \{x_1, x_2\}, x_1 \neq x_2,$$
$$P(\{\omega : X(\omega) = x_1\}) = p, P(\{\omega : X(\omega) = x_2\}) = 1 - p. \quad (28)$$

W szczególnym przypadku, gdy $x_1 = 1$*, zaś* $x_2 = 0$ *taki rozkład nazywamy rozkładem zero-jedynkowym i oznaczamy* $Bin(1, p)$*.*

Przykłady rozkładów dyskretnych. IV

Uwaga 11

Jeżeli zbiór wartości dyskretnej zmiennej losowej X jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych, to przyjmujemy następujące oznaczenie

$$p_k \overset{\mathrm{ozn}}{=} \begin{cases} P(\{\omega : X(\omega) = k\}) & \text{dla } k \in W_X \\ 0 & \text{dla } k \notin W_X \end{cases}. \tag{29}$$

Przykład 4 (Rozkład dwumianowy (Bernoulliego) z parametrami n i p)

Niech $p \in]0,1[$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

$$W_X := \{0, 1, \ldots, n\}, \; p_k := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \tag{30}$$

Oznaczenie $Bin(n, p)$.

Przykłady rozkładów dyskretnych. V

Przykład 5 (Rozkład Poissona z parametrem λ)

Niech $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

$$W_X := \{0\} \cup \mathbb{N},\ p_k := e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{31}$$

Oznaczenie $Po(\lambda)$.

Przykład 6 (Rozkład geometryczny z parametrem p)

Niech $p \in]0, 1[$.

$$W_X := \mathbb{N},\ p_k := p(1-p)^{k-1}. \tag{32}$$

Oznaczenie $Geom(p)$.

Przykłady rozkładów dyskretnych. VI

Przykład 7 (Rozkład ujemny dwumianowy z parametrami p, r)

Niech $p \in]0,1[$ *oraz* $r \in \mathbb{N}$.

$$W_X := \{0\} \cup \mathbb{N}, \;\; p_k := \binom{r+k-1}{k} p^r (1-p)^k. \tag{33}$$

Oznaczenie $NegBin(r,p)$.

Przykłady rozkładów dyskretnych. VII

Przykład 8 (Rozkład Pascala z parametrem p.[a])

[a] Jest to szczególny przypadek rozkładu ujemnego dwumianowego.

$$W_X := \{k, k+1, \ldots\}, \; p_l := \binom{l-1}{k-1} p^k (1-p)^{l-k}. \tag{34}$$

Lub inaczej

$$W_X := \{0\} \cup \mathbb{N}, \; p_l := \binom{l+k-1}{k-1} p^k (1-p)^l. \tag{35}$$

Przykłady rozkładów dyskretnych. VIII

Przykład 9 (Rozkład hipergeometryczny z parametrami a, b, n)

Niech $a + b > n$ oraz $a \geqslant n$ i $b \geqslant n$.

$$W_X := \{0, 1, \ldots, n\}\,,\ p_k := \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}. \tag{36}$$

Przykłady zmiennych losowych (rozkładów) ciągłych. I

Uwaga 12

Zmienne losowe ciągłe i rozkłady ciągłe są scharakteryzowane przez swoją gęstość.

Definicja 18

Indykatorem zbioru A nazywamy funkcję $\mathbb{I}_A \colon A \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$\mathbb{I}_A(r) := \begin{cases} 1 & gdy\ r \in A \\ 0 & gdy\ r \notin A \end{cases}.$$

Przykłady zmiennych losowych (rozkładów) ciągłych. II

Przykład 10

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ *oraz* $a < b$. *Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{1}{b-a}\mathbb{I}_{]a,b[}(r) \tag{37}$$

nazywamy rozkład równomierny na odcinku $]a, b[$ *i oznaczamy* $\mathcal{U}(]a, b[)$.

Przykład 11

Niech $\lambda \in \mathbb{R}_+$. *Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \lambda e^{-\lambda r}\mathbb{I}_{]0,\infty[}(r) \tag{38}$$

nazywamy rozkładem wykładniczym z parametrem λ *i oznaczamy* $Exp(\lambda)$.

Przykłady zmiennych losowych (rozkładów) ciągłych. III

Przykład 12

Niech $\lambda \in \mathbb{R}_+$*. Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|r|} \tag{39}$$

nazywamy rozkładem Laplace'a z parametrem λ *i oznaczamy* $L(\lambda)$*.*

Przykład 13

Niech $a \in \mathbb{R}$ *oraz* $b \in \mathbb{R}_+$*. Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{1}{\pi}\frac{b}{b^2 + (r-a)^2} \tag{40}$$

nazywamy rozkładem Cauchy'ego z parametrami a, b *i oznaczamy* $Cauchy(a, b)$*.*

Przykłady zmiennych losowych (rozkładów) ciągłych. IV

Przykład 14

Niech $m \in \mathbb{R}$ *oraz* $\sigma \in \mathbb{R}_+$. *Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(r-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{41}$$

nazywamy rozkładem normalny lub rozkładem Gaussa, z parametrami m, σ *i oznaczamy* $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

Przykłady zmiennych losowych (rozkładów) ciągłych. V

Przykład 15

Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. *Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} r^{\alpha-1} e^{-\beta r} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(r) \tag{42}$$

nazywamy rozkładem gamma z parametrami α, β *i oznaczamy* $\Gamma(\alpha, \beta)$.

Przykłady zmiennych losowych (rozkładów) ciągłych. VI

Uwaga 13

Gęstość rozkładu gamma można też zdefiniować następująco:
Niech $\kappa, \theta \in \mathbb{R}_+$.

$$f(r) := \frac{1}{\theta^\kappa \Gamma(\kappa)} r^{\kappa-1} e^{-\frac{r}{\theta}} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(r). \tag{43}$$

Oznaczenie $\Gamma(\kappa, \theta)$.

Uwaga 14

α *występujące w definicji 15 jest parametrem kształtu, a* β *natężenia.*
Natomiast κ *w uwadze 12 jest jest parametrem kształtu, a* θ *skali.*

Przykłady zmiennych losowych (rozkładów) ciągłych. VII

Uwaga 15

Rozkład wykładniczy z parametrem λ jest rozkładem gamma z parametrami kształtu 1 i skali $\frac{1}{\lambda}$.

Przykład 16 (Rozkład chi-kwadrat z n stopniami swobody.)

Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozkład gamma z parametrami z parametrem kształtu $\frac{n}{2}$ i skali 2 nazywamy rozkładem chi-kwadrat o n-stopniach swobody. Oznaczenie $\chi^2(n)$.

Przykłady zmiennych losowych (rozkładów) ciągłych. VIII

Przykład 17

Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. *Rozkład o gęstości*

$$f(r) := \frac{1}{B(\alpha, \beta)} r^{\alpha-1}(1-r)^{\beta-1}\mathbb{I}_{[0,1]}(r) \tag{44}$$

nazywamy rozkładem beta z parametrami α, β *i oznaczamy Beta*(α, β).

Uwaga 16

Mamy

$$B(p, q) := \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Przykłady zmiennych losowych (rozkładów) ciągłych. IX

Przykład 18

Niech $n \in \mathbb{N}$. Rozkład o gęstości

$$f(r) := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{r^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{45}$$

nazywamy rozkładem t-Studenta z n stopniami swobody i oznaczamy $t(n)$.

Uwaga 17

Rozkład t-Studenta $t(1)$ jest rozkładem Cauchy'ego $Cauchy(0, 1)$.