Metody probabilistyczne i statystyka - wykład szósty[1]

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki Uniwersytet w Białymstoku

27 marca 2020

Spis treści

Pojęcie prawa wielkich liczb. I

Niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem jednowymiarowych i całkowalnych zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P). Wprowadźmy oznaczenie

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Definicja 1

Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$ spełnia mocne prawo wielkich liczb (MPWL) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{p.n.} 0. \tag{1}$$

Pojęcie prawa wielkich liczb. II

Definicja 2

Mówimy, że ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$ spełnia słabe prawo wielkich liczb (SPWL) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{P} 0. \tag{2}$$

Warunki dostateczne - SPWL.

Twierdzenie 1

Niech ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *całkowalnych z kwadratem spełnia jeden z warunków*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathbb{D}^2(S_n)}{n^2} = 0$,
2. *zmienne losowe ciągu* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *są parami nieskorelowane i mają wspólnie ograniczoną wariancję.*

Wówczas ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *spełnia SPWL.*

Uwaga 1

Założenie (ii) *w twierdzeniu* 1 *można osłabić wymagając, aby istniały* $\alpha \in]0,1[$ *i dodatnie* C *takie, że*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ \mathbb{D}^2(X_n) \leqslant Cn^{\alpha}. \quad (3)$$

Słabe prawo wielkich liczb Bernoulliego. I

Twierdzenie 2

Jeżeli przez S_n oznaczymy liczbę sukcesów w schemacie Bernoulliego n prób z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p, to

$$\forall_{\varepsilon>0} \lim_{n\to\infty} P\left(\left\{\omega : \left|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\right| > \varepsilon\right\}\right) = 0. \tag{4}$$

Warunki dostateczne - MPWL. I

Lemat 1 (Twierdzenie Toeplitza)

Niech $(a_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem liczb nieujemnych i niech ciąg $(b_n)_{n\geqslant 1}$ będzie ciągiem rosnącym liczb dodatnich określonych następująco $b_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Wówczas jeżeli ciąg $(x_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem zbieżnym o granicy równej x, to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = x. \tag{5}$$

Warunki dostateczne - MPWL. II

Lemat 2 (Twierdzenie Kroneckera)

Niech $(b_n)_{n \geqslant 1}$ będzie rosnącym ciągiem liczb dodatnich rozbieżnym do nieskończoności, a $(x_n)_{n \geqslant 1}$ ciągiem liczb rzeczywistych takim, że szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ jest zbieżnym. Wtedy

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k x_k = 0. \tag{6}$$

W szczególności jeśli $b_n = n$ oraz $x_n = \frac{y_n}{n}$, to jeżeli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n}$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} = 0$.

Warunki dostateczne - MPWL. III

Twierdzenie 3 (Kołmogorowa)

Niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych całkowalnych z kwadratem. Niech* $(b_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie rosnącym ciągiem liczb dodatnich takich, że* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{D}^2(X_n)}{b_n^2} < +\infty$. *Wtedy*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{b_n} = 0 \ P\text{-}p.n.\ . \tag{7}$$

W szczególności, jeżeli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{D}^2(X_n)}{n^2} < +\infty$, *to ciąg* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *spełnia MPWL.*

Warunki dostateczne - MPWL. IV

Lemat 3

Niech X będzie nieujemną zmienna losową. Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant k\}\right) \leqslant \mathbb{E}(X) \leqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant k\}\right). \tag{8}$$

Wniosek 1

Jeżeli nieujemna zmienna losowa X jest całkowalna, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant k\}\right) < +\infty.$$

Warunki dostateczne - MPWL. V

Wniosek 2

Jeżeli dla nieujemnej zmiennej losowej X *zachodzi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant k\}\right) < +\infty,$$

to jest ona całkowalna.

Twierdzenie 4 (MPWL Kołmogorowa)

Niech $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach i całkowalnych. Wtedy ciąg* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *spełnia MPWL.*

Warunki dostateczne - MPWL. VI

Twierdzenie 5 (Chinczyna)

Ciąg $(X_n)_{n\geqslant 1}$ zmiennych losowych parami niezależnych o jednakowym rozkładzie i całkowalnych spełnia SPWL.