Metody probabilistyczne i statystyka - wykład dwunasty[1]
Testowania hipotez: testy istotności

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki Uniwersytet w Białymstoku

7 maja 2020r.

Spis treści

Test istotności. I

Definicja 1

Mówimy, że δ jest testem na poziomie istotności α jeżeli

$$\sup_{\theta\in\Theta_0} P_\theta(\{\delta(X)=1\}) \leqslant \alpha. \tag{1}$$

Uwaga 1

W przypadku hipotezy prostej warunek (1) ma postać

$$P_{\theta_0}(\{\delta(X)=1\}) \leqslant \alpha.$$

Do najczęściej stosowanych w praktyce testów statystycznych należą testy istotności, nazywane tak ze względu na to, że w testach tych uwzględnia się tylko poziom istotności. Testy te mają taką własność, że dla zadanego z góry poziomu istotności α zapewniają możliwie najmniejszą wartość

Test istotności. II

błędu II-go rodzaju, czyli możliwie największą moc. Testy te są również testami zgodnymi.

W testach istotności zdecydowanie odrzuca się hipotezę zerową, gdy wartość sprawdzianu wpada do zbioru krytycznego, w przeciwnym wypadku orzeka się tylko, że nie ma podstaw do odrzucenia tej hipotezy.

Zakładać będziemy, że mamy do dyspozycji wyniki obserwacji dla prób prostych.

Uwaga 2

W praktyce np. w testach dostępnych w programach statystycznych podawana jest ***p-wartość*** *(ang. p-value). Przedstawmy jej definicję.*

Test istotności. III

Definicja 2

Załóżmy, że test ma postać $\delta(X) = \mathbb{I}_{\{T(X)>c\}}$. *Poziom krytyczny testu lub inaczej p-wartość jest to najmniejszy poziom istotności przy którym odrzucamy hipotezę* H_0 *tzn. jeśli zaobserwujemy* $x \in \mathcal{X}$, *to*

$$P = \sup_{\theta \in \Theta_0} P_\theta(\{T(X) > T(x)\}).$$

Zasady konstrukcji testów istotności.

1. Formułujemy hipotezę zerową i alternatywną.
2. Na podstawie próby losowej $(X_1, \ldots, X_n)$ wyznaczamy statystykę T_n (sprawdzian hipotezy), której rozkład określamy przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza zerowa.

Test istotności. IV

3. Dla ustalonego z góry „*małego*” prawdopodobieństwa α wyznaczamy obszar krytyczny Λ tak, aby
$$P(\{T_n \in \Lambda\}) = \alpha.$$
4. Jeżeli konkretna realizacja próby należy do Λ, to hipotezę zerową odrzucamy, w przeciwnym wypadku nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Uwaga 3

α jest poziom istotności (prawdopodobieństwem popełnienia błędu I-go rodzaju). W praktyce $\alpha \in [0{,}01; 0{,}1]$.

Założenia dotyczące populacji i próby

Zakładamy, że rozkład cechy w zbiorowości generalnej jest rozkładem normalnym $\mathcal{N}(m, \sigma)$. Wybór sprawdzianu hipotezy zależy od liczebności próby n oraz od tego, czy parametr σ w zbiorowości generalnej jest znany. I tak, jeśli:

- σ jest znane i $n \leqslant 30$ albo
- σ jest znane i $n > 30$ lub
- σ jest nieznane i $n > 30$, ale wówczas $\sigma \approx s$,

to sprawdzianem hipotezy $H_0 : m = m_0$ jest statystyka

$$U = \frac{\overline{X} - m}{\sigma}\sqrt{n}$$

o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$.

Natomiast, gdy σ jest nieznane i $n \leqslant 30$, sprawdzianem tej hipotezy jest:

$$T = \frac{\overline{X} - m}{S}\sqrt{n-1} \quad \text{lub} \quad T = \frac{\overline{X} - m}{\tilde{S}}\sqrt{n}$$

Założenia w przypadku populacji normalnej ze znanym odchyleniem

W przypadku znanego odchylenia standardowego lub też nieznanego odchylenia standardowego, lecz dużej próby

1. Estymator - średnia z próby $\overline{X}$.
2. Hipoteza zerowa $H_0 : m = m_0$.
3. Jeżeli hipoteza zerowa jest prawdziwa, to $\overline{X}$ ma rozkład $\mathcal{N}\left(m_0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.
4. Sprawdzian hipotezy - statystyka $U = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n}$, która ma rozkład normalny standardowy.
5. Poziom istotności α.
6. Parametrem opisującym rodzinę rozkładów jest $\theta \equiv m$. Będziemy też pisać θ_0 zamiast m_0.

Przypadek I. I

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

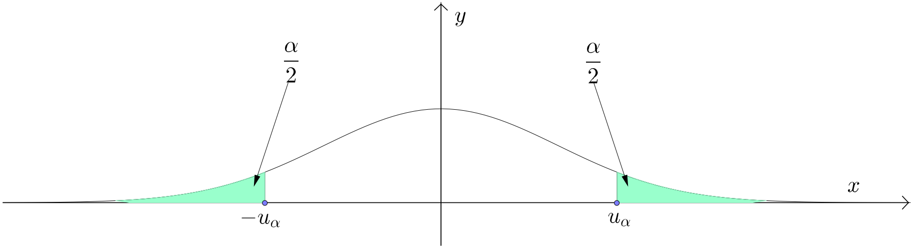
$$\begin{aligned} H_0 : \quad & m = m_0 \\ H_1 : \quad & m \neq m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P_{\theta_0}(\{|U| \geqslant u_\alpha\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{u : |u| \geqslant u_\alpha\}$, u_α wartość krytyczna, $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

Przypadek I. II



Rysunek: Obustronny obszar krytyczny testu istotności dla średniej populacji normalnej ze znanym σ.

Przypadek II. I

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

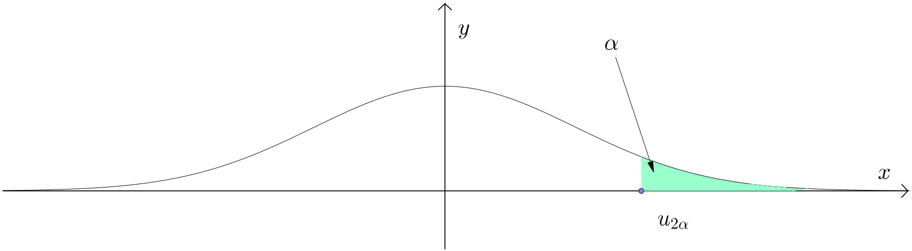
$$\begin{aligned} H_0: &\quad m = m_0 \\ H_1: &\quad m > m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P_{\theta_0}(\{U \geqslant u_{2\alpha}\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{u : u \geqslant u_{2\alpha}\}$, $u_{2\alpha}$ wartość krytyczna, $\Phi(u_{2\alpha}) = 1 - \alpha$.

Przypadek II. II



Rysunek: Prawostronny obszar krytyczny testu istotności dla średniej populacji normalnej ze znanym σ.

Przypadek III. I

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

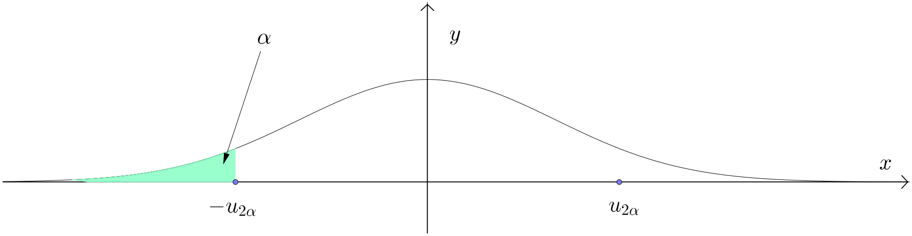
$$\begin{aligned} H_0: &\quad m = m_0 \\ H_1: &\quad m < m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P_{\theta_0}(\{U \leqslant -u_{2\alpha}\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{u : u \leqslant -u_{2\alpha}\}$, $-u_{2\alpha}$ wartość krytyczna, $\Phi(u_{2\alpha}) = 1 - \alpha$.

Przypadek III. II



Rysunek: Lewostronny obszar krytyczny testu istotności dla średniej populacji normalnej ze znanym σ.

Przykłady. I

Przykład 1 ([1, Przykład 11.2])

Czas montowania elementu T w automatycznej pralce bębenkowej jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Norma techniczna przewiduje na tę czynność 6 minut. Natomiast wśród jej wykonawców panuje pogląd, że ten czas jest zbyt krótki. Zweryfikujemy tą hipotezę na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$, przy założeniu, że standardowe odchylenie czasu montowania wynosi $\sigma = 1{,}5$ minuty. Badanie przeprowadzono w grupie 25 robotników i ich średni czas montowania przez nich wynosił $\overline{X} = 6\frac{1}{3}$ minuty.

ROZWIĄZANIE.

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko H_1, gdzie

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad m = 6 \\ H_1 &: \quad m > 6. \end{aligned}$$

Przykłady. II

$$U = \frac{\overline{X} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{6\frac{1}{3} - 6}{1{,}5}\sqrt{25} \approx 1{,}1.$$

Mamy w tym wypadku prawostronny obszar krytyczny

$$P(\{U \geqslant u_{0,1}\}) = 0{,}05,$$

gdzie $\Phi(u_{0,1}) = 1{,}65$, a więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. $\square$

Ogólne założenia dla populacji normalnej z nieznanym odchyleniem dla małej próby

W przypadku nieznanego odchylenia standardowego i małej próby

1. Estymator – średnia z próby $\overline{X}$.
2. Hipoteza zerowa $H_0 : m = m_0$.
3. Sprawdzian hipotezy – statystyka $T = \frac{\overline{X} - m_0}{S} \sqrt{n-1}$.
4. Jeżeli hipoteza zerowa jest prawdziwa, to $\overline{X}$ ma rozkład t-Studenta o $n-1$ stopniach swobody.
5. Poziom istotności α.
6. Parametrem opisującym rodzinę rozkładów jest $\theta \equiv m$. Będziemy też pisać θ_0 zamiast m_0.

Przypadek I. I

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

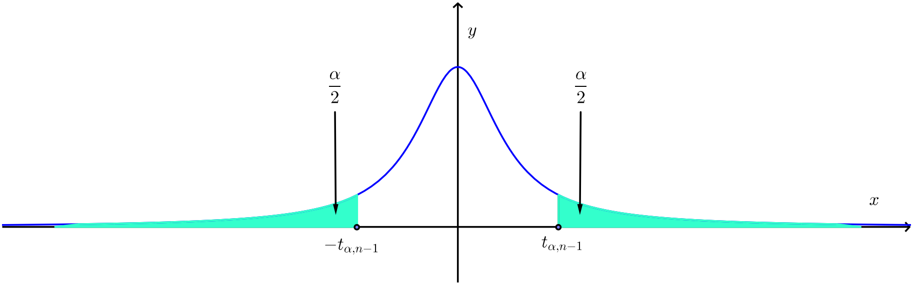
$$\begin{aligned} H_0: &\quad m = m_0 \\ H_1: &\quad m \neq m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P(\{|T| \geqslant t_\alpha\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{t : |t| \geqslant t_\alpha\}$, t_α wartość krytyczna.

Przypadek I. II



Rysunek: Obustronny obszar krytyczny testu istotności dla średniej populacji normalnej z nieznanym σ.

Przypadek II.

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

$$\begin{aligned} H_0 : &\qquad m = m_0 \\ H_1 : &\qquad m > m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P(\{T \geqslant t_{2\alpha}\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{t : t \geqslant t_{2\alpha}\}$, $t_{2\alpha}$ wartość krytyczna.

Przypadek III.

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad m = m_0 \\ H_1 : &\quad m < m_0. \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P(\{T \leqslant -t_{2\alpha}\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny $\{t : t \leqslant -t_{2\alpha}\}$, $-t_{2\alpha}$ wartość krytyczna.

Przykład. I

Przykład 2 ([1, Przykład 11.3])

Plony żyta na powierzchniach uprawianych w pewnym województwie maja rozkład normalny o nieznanych parametrach. Przyjmując, że średni plon z tych powierzchni wynosi 28 kwintali. Sprawdzimy słuszność hipotezy, przy założeniu, że dla 20 powierzchni otrzymano średni plon 25 kwintali z odchyleniem standardowym 4,5 kwintala. Przyjmiemy poziom istotności $\alpha = 0{,}01$.

ROZWIĄZANIE.

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad m = 28 \\ H_1 : &\quad m \neq 28. \end{aligned}$$

Przykład. II

$$T = \frac{\overline{X} - m_0}{S}\sqrt{n-1} = \frac{25-28}{4{,}5}\sqrt{19} \approx -2{,}906.$$

Mamy tutaj obustronny obszar krytyczny

$$P(\{|t| \geqslant t_{0,01}\}) = 0{,}01,$$

gdzie jest 19 stopni swobody i $t_{0,01;19} = 2{,}861$ oraz $|t| = 2{,}906 > t_{0,01;19}$. Wartość statystyki z próby znalazła się w obszarze krytycznym, więc odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. □

Założenia w populacji o dowolnym rozkładzie.

1. Hipotez zerowa $H_0 : m = m_0$.
2. Średnia z próby $\overline{X}$ ma asymptotyczny rozkład normalny $\mathcal{N}\left(m_0, \frac{\tilde{s}}{\sqrt{n}}\right)$[2].
3. Sprawdzianem hipotezy jest statystyka $U = \frac{\overline{X} - m_0}{s}\sqrt{n}$, która ma asymptotyczny rozkład normalny standardowy.
4. Poziom ufności α.

[2] $\tilde{s}$ jest asymptotycznie zbieżne do odchylenia standardowego z populacji.

Testowanie hipotez

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad m = m_0 \\ H_1 : &\quad m \neq m_0 \end{aligned}$$

Dla poziomu istotności α mamy

$$P(\{|U| \geqslant u_\alpha\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny testu $\{u : |u| \geqslant u_\alpha\}$, u_α wartość krytyczna.

Uwaga 4

Podobnie, jak w przypadku, gdy znane jest odchylenie standardowe, można wyznaczyć obszary krytyczne dla dwóch kolejnych hipotez alternatywnych.

Ogólne założenia

1. Badamy dwie populacje normalne o rozkładach $\mathcal{N}(m_1,\sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2,\sigma_2)$.
2. Z każdej populacji losujemy próbę losową o liczebnościach równych odpowiednio n_1 i n_2.
3. Hipoteza zerowa $H_0 : m_1 = m_2$.
4. Estymatorem jest różnica średnich $\overline{X_1} - \overline{X_2}$ o rozkładzie $\mathcal{N}\left(m_1 - m_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.
5. Poziom ufności α.
6. W zależności od założeń dotyczących zbiorowości generalnych oraz od liczebności prób – sprawdzian hipotezy H_0 ma różną postać i jest związany z rozkładem normalnym lub rozkładem t-Studenta.

Sprawdzian hipotezy. I

Jeśli

- σ_1, σ_2 - znane i $n_1 \leqslant 30, n_2 \leqslant 30$,
- σ_1, σ_2 - znane i $n_1 > 30, n_2 > 30$,
- σ_1, σ_2 - nieznane i $n_1 > 30, n_2 > 30$ to $\sigma_1^2 \approx s_{(1)}^2$, $\sigma_2^2 \approx s_{(2)}^2$,

wówczas sprawdzian hipotezy ma postać

$$U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}},$$

który, przy założeniu prawdziwości H_0, ma rozkład normalny standardowy.

W przypadku, gdy

- σ_1, σ_2 - nieznane i $\sigma_1 = \sigma_2$, $n_1 \leqslant 30, n_2 \leqslant 30$,

Sprawdzian hipotezy. II

to korzystamy ze sprawdzianu hipotezy

$$T = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

gdzie s_p^2 jest wariancją prób połączonych, który, przy założeniu prawdziwości H_0, ma rozkład t-Studenta o $n_1 + n_2 - 2$ stopniach swobody. Ponadto wyraża się wzorem $s_p^2 = \frac{(n_1-1)\tilde{s}_1^2 + (n_2-1)\tilde{s}_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1+n_2-2}$.

Znane odchylenia standardowe w populacjach

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad m_1 = m_2 \\ H_1 : &\quad m_1 \neq m_2. \end{aligned}$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej sprawdzianem testu jest statystyka

$$U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}.$$

Dla poziomu ufności α mamy

$$P(\{|U| \geqslant u_\alpha\}) = \alpha.$$

Obszar krytyczny testu $\{u : |u| \geqslant u_\alpha\}$.

Odchylenia standardowe nieznane, ale równe

Testujemy hipotezę H_0 przeciwko hipotezie H_1, gdzie

$$\begin{aligned} H_0: &\quad m_1 = m_2 \\ H_1: &\quad m_1 \neq m_2. \end{aligned}$$

Przy założeniu równości odchyleń standardowych $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ i hipotezy zerowej sprawdzianem testu jest statystyka

$$T = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}.$$

Mamy $P(\{|t| \geqslant t_\alpha\}) = \alpha$.

Ogólne założenia. I

Populacje dowolne (duże próby)

1. Z każdej populacji losujemy próbę losową o liczebnościach równych odpowiednio n_1 i n_2.
2. Formułujemy hipotezę zerową i alternatywną

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad m_1 = m_2 \\ H_1 : &\quad m_1 \neq m_2, \end{aligned}$$

   i przyjmujemy poziom ufności α.
3. Estymatorem jest różnica średnich $\overline{X_1} - \overline{X_2}$ o rozkładzie $\mathcal{N}\left(m_1 - m_2, \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

Ogólne założenia. II

4. Wykorzystujemy statystykę $U = \frac{\overline{X_1} - \overline{X_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$, która przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, ma asymptotyczny rozkład normalny $\mathcal{N}(0,1)$.
5. Tak więc jest $P(\{|U| \geqslant u_\alpha\}) = \alpha$ i obszar krytyczny testu $\{u : |u| \geqslant u_\alpha\}$.

Przykład. I

Przykład 3 ([1, Przykład 11.4])

Przypuszcza się, że młodsze osoby łatwiej decydują się na zakup nowych, nieznanych produktów. Badanie przeprowadzone wśród przypadkowych 20 nabywców nowego produktu i 22 nabywców znanego już wyrobu pewnej firmy dostarczyło następujących informacji o wieku klientów

- *kupujący nowy produkt: średnia 27,7; odchylenie 5,5,*
- *kupujący znany produkt: średnia 32,1; odchylenie 6,3.*

Zweryfikujemy hipotezę, że średni wiek kupujących nowy produkt (m_1) jest równy średniemu wiekowi (m_2) kupujących znany produkt, przy poziome istotności $\alpha = 0{,}05$.

$$\begin{aligned} H_0 :& \quad m_1 = m_2 \\ H_1 :& \quad m_1 < m_2. \end{aligned}$$

Przykład. II

ROZWIĄZANIE.
Zakładamy, że rozkład wieku obu zbiorowości jest normalny i charakteryzuje się tym samym odchyleniem standardowym. Stosując statystykę $t = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$ otrzymujemy $s_p^2 = 35{,}206$,

$t = \frac{27{,}7-32{,}1}{\sqrt{35{,}206\left(\frac{1}{20}+\frac{1}{22}\right)}} = -2{,}4$.

Lewostronny obszar krytyczny określa równość $P(\{t \leqslant -t_{2\alpha}\}) = \alpha$. W naszym wypadku $t_{2\alpha} = t_{0{,}1;40} = -1{,}684$.

Wartość statystyki z próby znalazła się w obszarze krytycznym, więc odrzucamy hipotezę zerową na korzyść hipotezy alternatywnej. □

Populacja normalna o nieznanych parametrach. I

Przyjmijmy, że parametr $\theta = (m, \sigma)$.

Należy zweryfikować hipotezę, że wariancja σ^2 w tej populacji ma ustaloną wartość σ_0^2.

$$\begin{array}{ll} H_0: & \sigma^2 = \sigma_0^2, \\ H_1: & \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad \text{(większe zróżnicowanie).} \end{array}$$

Stosujemy statystykę $\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$, która ma rozkład $\chi^2(n-1)$. Obszar krytyczny, dla poziomu istotności α, wyznacza równość $P_\theta(\{\chi^2 \geqslant \chi^2_{\alpha,n-1}\}) = \alpha$.

Jeżeli wartość statystyki z próby przekroczy wartość krytyczną, to odrzucamy hipotezę zerową na korzyść alternatywnej. W przeciwnym wypadku nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Populacja normalna o nieznanych parametrach. II

Przykład 4 ([1, Przykład 11.6])

Chcemy sprawdzić czy odchylenie standardowe w rozkładzie czasu montowania elementu T w pralce automatycznej rzeczywiście wynosi $\sigma = 1{,}5$. Przyjąć poziom istotności $\alpha = 0{,}1$.

ROZWIĄZANIE.

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad \sigma^2 = 2{,}25, \\ H_1 : &\quad \sigma^2 > 2{,}25. \end{aligned}$$

W badanej grupie 25 robotników otrzymano wariancję z próby $s^2 = 2{,}8$. Obliczając statystykę otrzymujemy $\chi^2 = \frac{(25-1)\cdot 2{,}8}{2{,}25} = 29{,}87$. Otrzymujemy $\chi^2_{0{,}1;24} = 33{,}196$. Tak więc wartość statystyki z próby znalazła się poza obszarem krytycznym, więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. □

Populacja normalna o nieznanych parametrach. III

Uwaga 5

1. *Dla* $n-1>30$ *obszar krytyczny testu wariancji należy budować na podstawie rozkładu normalnego.*
2. *Zamiast statystyki* $\chi^2=\frac{nS^2}{\sigma^2}$ *można stosować statystykę* $\chi^2=\frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\sigma^2}$.

Populacje normalne $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. I

Nieznane są wartości oczekiwane i odchylenia standardowe.

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \quad & \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Alternatywnie hipotezę zerową i alternatywą można sformułować:

$$\begin{aligned} H_0 : \quad & \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1 : \quad & \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1. \end{aligned}$$

Do weryfikacji hipotezy zerowej używamy wariancji $\tilde{s}_1^2$ i $\tilde{s}_2^2$, obliczanych z dwóch niezależnych prób, o liczebnościach równych odpowiednio n_1 i n_2.

Stosujemy statystykę $F = \frac{\frac{\tilde{s}_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\tilde{s}_2^2}{\sigma_2^2}}$ o rozkładzie $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Populacje normalne $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. II

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej mamy $F = \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2}$.
Prawostronna część obszaru krytycznego opisana jest zależnością

$$P(\{F \geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}\}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Natomiast lewostronna część obszaru krytycznego ma postać

$$P(\{F \leqslant F_{\frac{\alpha}{2}}\}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Uwaga 6

W tablicach jest tylko $F_{\frac{\alpha}{2}}$, zatem w statystyce F w liczniku umieszczamy większą z wariancji obu prób. Obliczoną tak wartość F porównujemy z $F_{\frac{\alpha}{2}}$. Jeżeli jest spełniona nierówność $F \geqslant F_{\frac{\alpha}{2}}$, to odrzucamy hipotezę zerową.

Populacje normalne $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. III

Jeżeli

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \\ H_1: &\quad \sigma_1^2 > \sigma_2^2, \end{aligned}$$

to

$$F = \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2}.$$

Natomiast jeżeli

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \\ H_1: &\quad \sigma_1^2 < \sigma_2^2, \end{aligned}$$

to

$$F = \frac{\tilde{S}_2^2}{\tilde{S}_1^2}.$$

Populacje normalne $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. IV

W obu przypadkach mamy prawostronny obszar krytyczny $P(\{F \geqslant F_\alpha\}) = \alpha$.

Przykład 5 ([1, Przykład 11.7])

Sprawdzić, czy słuszne jest założenie o równości odchyleń standardowych wieku w populacji kupujących wyroby nowe i znane, dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$.

ROZWIĄZANIE. Wtedy $\frac{\alpha}{2} = 0{,}025$. Ponadto mamy

$$\begin{aligned} H_0 : &\quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2, \\ H_1 : &\quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Ponadto mamy

$$F = \frac{\tilde{s}_2^2}{\tilde{s}_1^2} = \frac{39{,}69}{30{,}25} = 1{,}31 \quad \text{oraz} \quad F_{0{,}025;21;19} = 2{,}49.$$

Populacje normalne $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. V

Tak wiec brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej $(1{,}31 < 2{,}49)$.
$\square$

Spis treści

Klasyfikacja nieparametrycznych testów istotności

Nieparametryczne testy istotności dzielimy na

1. testy losowości – weryfikują hipotezę, że próba ma charakter losowy,
2. testy niezależności – sprawdzają hipotezę o niezależności dwóch zmiennych losowych,
3. testy zgodności – weryfikują hipotezę o postaci funkcyjnej rozkładu populacji generalnej,
4. inne.

Test zgodności sprawdza zgodność rozkładu empirycznego z próby z rozkładem hipotetycznym lub też zgodność dwóch lub więcej rozkładów empiryczny z próby.

Test zgodności chi-kwadrat. I

Najczęściej stosowanymi nieparametrycznymi testami są testy zgodności chi-kwadrat.

Test ten zbudowany jest na podstawie statystyki χ^2. Mamy

$$H_0 : F = F_0 \qquad \text{(populacja generalna ma rozkład określony pewną dystrybuantą } F_0\text{)},$$
$$H_1 : F \neq F_0.$$

Zasady przeprowadzania testu chi-kwadrat

1. Losujemy z populacji dużą próbę (będziemy wykorzystywać rozkład graniczny statystyki).
2. Budujemy szereg rozdzielczy – tworzymy r rozłącznych klas wartości badanej cechy (zmiennej) w próbie (liczebność i-tej klasy wynosi n_i).

Test zgodności chi-kwadrat. II

3. Zakładamy prawdziwość hipotezy zerowej.
4. Obliczamy prawdopodobieństwa p_i tego, że badana cecha przyjmie wartości z i-tej klasy. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej liczebności poszczególnych klas powinny wynosić np_i dla $i \in \overline{1, r}$, gdzie n liczebność próby.

Uwagi

1. Podstawą konstrukcji miary zgodności rozkładu empirycznego z hipotetycznym jest różnica miedzy liczebnościami zaobserwowanymi n_i, a liczebnościami hipotetycznymi np_i.

Test zgodności chi-kwadrat. III

2. Do oceny zgodności stosujemy statystykę

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

   która przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej ma asymptotyczny rozkład $\chi^2(r-k-1)$, gdzie k jest liczbą parametrów rozkładu, które zostały oszacowane na podstawie próby metodą największej wiarygodności.

3. Jeżeli prawdziwa jest hipoteza zerowa, to dla poziomu istotności α mamy

$$P(\{\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha\}) = \alpha.$$

Test zgodności chi-kwadrat. IV

4. Jeżeli wartość statystyki z próby jest nie mniejsza niż wartość krytyczna (odpowiada to temu, że różnica między rozkładem empirycznym, a hipotetycznym jest statystycznie istotna), to hipotezę zerową odrzucamy.

Test zgodności chi-kwadrat. V

Przykład 6

[1, Przykład 11.10] Przez 300 dni obserwowano pracę pewnej maszyny, rejestrując liczbę uszkodzeń w ciągu dnia. Otrzymano następujące dane

liczba uszkodzeń (x_i)	*liczba dni* (n_i)
0	140
1	110
2	30
3	10
4	10

Zweryfikujemy hipotezę, że liczba uszkodzeń ma rozkład Poissona.

ROZWIĄZANIE. Określamy wartość parametru λ dla rozkładu Poissona.

Test zgodności chi-kwadrat. VI

Estymatorem parametru λ otrzymanym MNW[3] jest średnia arytmetyczna z próby $\overline{X}$.

W naszym przypadku wynosi ona $\overline{x} = 0{,}8$.

Mamy

$$P(\{X = k\}) = \frac{(0{,}8)^k}{k!} e^{-0{,}8}, \text{ dla } k \in \overline{0, 4}.$$

Konstrukcja tablicy roboczej

i	x_i	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0	140				
2	1	110				
3	2	30				
4	3	10				
5	$\geqslant 4$	10				

Test zgodności chi-kwadrat. VII

i	x_i	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$
1	0	140	0,449	134,7	28,09	0,209
2	1	110	0,359	107,7	5,29	0,049
3	2	30	0,144	43,2	174,24	4,033
4	3	10	0,038	11,4	1,96	0,1719
5	$\geqslant 4$	10	0,010			
$\sum$		300	1			

Test zgodności chi-kwadrat. VIII

i	x_i	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0	140	0,449	134,7	28,09	0,209
2	1	110	0,359	107,7	5,29	0,049
3	2	30	0,144	43,2	174,24	4,033
4	3	10	0,038	11,4	1,96	0,1719
5	$\geqslant 4$	10	0,010	3,0		
$\sum$		300	1			

Test zgodności chi-kwadrat. IX

Z rozkładu asymptotycznego musi być tak, że $np_i \geqslant 5$, więc łączymy dwie ostatnie klasy tworząc nową tablicę roboczą.

i	x_i	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0	140	0,449	134,7	28,09	0,209
2	1	110	0,359	107,7	5,29	0,049
3	2	30	0,144	43,2	174,24	4,033
4	$\geqslant 3$	20	0,048	14,4	31,36	2,178
$\sum$		300	1	300		$\chi^2 = 6{,}469$

Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0{,}05$ i mając $r - k - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ więc $\chi^2_{0{,}05;2} = 5{,}991$. Na podstawie danych odrzucamy hipotezę zerową.

Test zgodności chi-kwadrat. X

Uwaga 7

Gdyby dany był parametr λ, to wartość krytyczną należałoby określić dla $r-1$ stopni swobody.

[3] Metoda największej wiarygodności.

Test zgodności λ-Kołmogorowa. I

Uwaga 8

Test ten może być stosowany tylko w przypadku ciągłej dystrybuanty teoretycznej.

Definicja 3 (Przypomnienie)

Dystrybuantą empiryczną F_n nazywamy funkcję określoną na podstawie danych (x_i, ω_i) dla $i \in \overline{1, k}$ wzorem

$$F_n(x) = \sum_{i : x_i \leqslant x} \omega_i, \tag{2}$$

gdzie $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ są wagami x_i.

Zasady/etapy konstrukcji testu λ-Kołmogorowa

Test zgodności λ-Kołmogorowa. II

1. Formułujemy hipotezę zerową i alternatywną

$$
\begin{aligned}
H_0 : &\qquad F = F_0 \\
H_1 : &\qquad F \neq F_0.
\end{aligned}
$$

2. Losujemy dużą próbę n elementową oraz budujemy szereg przedziałowy z dużą ilością wąskich klas.
3. Wyznaczamy dystrybuantę empiryczną.
4. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej różnice między dystrybuanta empiryczna, a hipotetyczną nie powinny być duże. Miarą zgodności obu dystrybuant jest statystyka $\lambda = D\sqrt{n}$, gdzie $D = \sup_{x} |F_n(x) - F_0(x)|$.

   Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka λ ma asymptotyczny rozkład λ-Kołmogorowa z obszarem krytycznym

Test zgodności λ-Kołmogorowa. III

wyznaczonym przez równość $P(\{\lambda \geqslant \lambda_\alpha\}) = \alpha$ z poziomem istotności α.
Jeżeli na podstawie próby otrzymamy wartość nie mniejszą niż wartość krytyczna $(\lambda \geqslant \lambda_\alpha)$ to hipotezę zerową odrzucamy.

Test zgodności λ-Kołmogorowa. IV

Przykład 7 ([1, Przykład 11.11])

Przypuśćmy, że jednostkowe koszty produkcji danego wyrobu mają rozkład normalny. W celu weryfikacji tego przypuszczenia zbadano próbę 200 zakładów produkujących ten wyrób otrzymując następujące dane

i	koszty jednostkowe	liczba zakładów (n_i)
1	2,50 – 3,50	5
2	3,50 – 4,50	10
3	4,50 – 5,50	35
4	5,50 – 6,50	80
5	6,50 – 7,50	50
6	7,50 – 8,50	10
7	8,50 – 9,50	10

Test zgodności λ-Kołmogorowa. V

Zweryfikujemy hipotezę, że rozkład jednostkowego kosztu produkcji tego wyrobu ma rozkład normalny.

ROZWIĄZANIE. Standaryzujemy górne granice klas, gdyż potrzebujemy m i σ, które oszacujemy na podstawie próby $m = \overline{x} = 6{,}15$ i $\sigma = s = 1{,}216$.

Etapy obliczania statystyki D (budowanie pomocniczej tablicy).

Do konstrukcji potrzebna będzie nam standaryzowana zmienna losowa.

Definicja 4

Wartość standaryzowana odpowiadająca obserwacji x wyraża się wzorem

$$u = \frac{x - \overline{x}}{s}. \tag{3}$$

Test zgodności λ-Kołmogorowa. VI

Budowania pomocniczej tablicy

i	x	u	$\Phi(u) = F_0(x)$	ω_i	$F_n(x)$	$\lvert F_n(x) - F_0(x)\rvert$
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
Σ						

Test zgodności λ-Kołmogorowa. VII

i	x	u	$\Phi(u) = F_0(x)$	ω_i	$F_n(x)$	$\lvert F_n(x) - F_0(x)\rvert$
1	3,50	$-2{,}18$	0,015	0,025	0,025	0,010
2	4,50					
3	5,50					
4	6,50					
5	7,50					
6	8,50					
7	9,50					
Σ						

Test zgodności λ-Kołmogorowa. VIII

i	x	u	$\Phi(u) = F_0(x)$	ω_i	$F_n(x)$	$\lvert F_n(x) - F_0(x)\rvert$
1	3,50	$-2{,}18$	0,015	0,025	0,025	0,010
2	4,50	$-1{,}36$	0,087	0,050	0,075	0,012
3	5,50	$-0{,}54$	0,295	0,175	0,250	$D = 0{,}045$
4	6,50	0,29	0,614	0,400	0,650	0,036
5	7,50	1,11	0,867	0,250	0,900	0,033
6	8,50	1,93	0,973	0,050	0,950	0,023
7	9,50	2,76	0,997	0,050	1,000	0,003
Σ				1		

Mamy $D = 0{,}045$ oraz $\lambda = 0{,}045 \cdot \sqrt{200} = 0{,}637$. Dla poziomu istotności $\alpha = 0{,}05$ mamy $\lambda_\alpha = 1{,}36$. Tak więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. □

Test zgodności λ-Kołmogorowa. IX

Uwaga 9

Tablice rozkładu λ-Kołmogorowa podają wartość dystrybuant $K(\lambda)$. λ_α otrzymujemy z warunku $K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$.

Test zgodności Kołmogorowa-Smirnowa. I

Test zgodności Kołmogorowa-Smirnowa służy do weryfikacji hipotezy, że dwie populacje mają jednakowy rozkład (dwie próby pochodzą z tej samej populacji).

Niech dwie populacje mają rozkłady opisane dystrybuantami F_1 i F_2.

Zasady konstrukcji testu Kołmogorowa-Smirnowa

1. Formułujemy hipotezę zerową i alternatywną

$$\begin{aligned} H_0: &\quad F_1 = F_2, \\ H_1: &\quad F_1 \neq F_2. \end{aligned}$$

2. Losujemy duże próby n_1 elementową z populacji pierwszej i n_2 elementową z populacji z populacji drugiej.
3. Wyznaczamy dystrybuanty empiryczne F_{n_1} i F_{n_2}.

Test zgodności Kołmogorowa-Smirnowa. II

4. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej różnica między dystrybuantami nie powinny być duże. Miarą zgodności obu dystrybuant jest statystyka $\lambda = D^{\star}\sqrt{n}$, gdzie $D^{\star} = \sup_{x} |F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)|$, a $n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$.
5. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka λ ma asymptotyczny rozkład λ-Kołmogorowa z obszarem krytycznym wyznaczonym przez równość $P(\{\lambda \geqslant \lambda_{\alpha}\}) = \alpha$ z poziomem istotności α. Jeżeli na podstawie próby otrzymamy wartość nie mniejszą niż wartość krytyczna λ_{α}, to hipotezę zerową odrzucamy.

Test Craméra-von Misesa. I

Test Craméra-von Misesa – test zgodności rozkładu z zadanym rozkładem wzorcowym lub drugą próbą. Zwykle stosuje się go do sprawdzenia zgodności z rozkładem normalnym. Został zaproponowany przez Haralda Craméra i Richarda von Mises w latach 1928-1930.

Statystyka Craméra-von Misesa

1. **Wersja dla jednej próby i rozkładu wzorcowego (teoretycznego).**

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dF(x),$$

gdzie F_n to dystrybuanta empiryczna, F dystrybuanta rozkładu teoretycznego, a n to liczebność próby.

Test Craméra-von Misesa. II

Zwykle do obliczeń używany jest wzór

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left(F(X_{i:n}) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2,$$

gdzie $X_{i:n}$ to i-ta statystyka pozycyjna, F i n mają te same znaczenie, jak poprzednio.

2. **Wersja dla dwóch prób.** Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_m$ będą obserwowanymi wartościami w pierwszej i drugiej próbie posortowane rosnąco. Niech $r_1, r_2, \ldots, r_n$ będą rangami obserwacji x_i w połączonej próbie (X i Y rangowane razem) i niech $s_1, s_2, \ldots, s_m$ będą rangami obserwacji y_i w połączonej próbie. Wówczas

$$W^2 = \frac{U}{nm(n+m)} - \frac{4mn-1}{6(m+n)},$$

Test Craméra-von Misesa. III

gdzie

$$U = n\sum_{i=1}^{n}(r_i - i)^2 + m\sum_{j=1}^{m}(s_j - j)^2.$$

Test Andersona-Darlinga. I

Test Andersona-Darlinga – test zgodności rozkładu z zadanym rozkładem teoretycznym (wzorcowym). Zwykle stosuje się go do sprawdzenia zgodności z rozkładem normalnym. Jest modyfikacją testu Craméra-von Misesa dokonaną w celu poprawy jego czułości w „ogonach” testowanego rozkładu.

Statystyka Andersona-Darlinga

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x),$$

gdzie F_n to dystrybuanta empiryczna, F to dystrybuanta rozkładu wzorcowego, a n to liczebność próby.

Jest to wersja testu Craméra-von Misesa ważona czynnikiem $\frac{1}{F(x)(1-F(x))}$.

Test Andersona-Darlinga. II

Zwykle do obliczeń używany jest prostszy wzór

$$A^2 = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left((2i-1)\ln F(X_{i:n}) + (2n+1-2i)\ln(1-F(X_{i:n}))\right)$$

lub (inna wersja)

$$A^2 = -n - \sum_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{n}\left[\ln F(X_{i:n}) + \ln\left(1-F(X_{(n+1-i):n})\right)\right],$$

gdzie $X_{i:n}$ to i-ta statystyka pozycyjna, F i n mają te same znaczenie, jak poprzednio.

Dla rozkładu normalnego stosuje się czasem poprawkę na wielkość próby

$$A^{2\star} = A^2\left(1 + \frac{0{,}75}{n} + \frac{2{,}25}{n^2}\right).$$

Test Andersona-Darlinga. III

Dla rozkładu normalnego, gdy $A^{2\star}$ przekracza 0.752 to hipoteza o normalności rozkładu w populacji jest odrzucana na poziomie 5%. Dla innych rozkładów test także może być stosowany, ale ma inne wartości krytyczne.

Bibliografia

J. Jóźwiak i J. Podgórski. *Statystyka od podstaw*. Wyd. 5 zmienione. Warszawa: PWE, 2000.