

Statystyka matematyczna - wykład piąty¹

Testowanie hipotez.

Parametryczne testy istotności - część II.

Nieparametryczne testy istotności - część I.

kierunek: informatyka i ekonometria I^o

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku

Spis treści

1 Testowanie hipotez

- Testy istotności dla wariancji
- Testy istotności dla dwóch wariancji

2 Nieparametryczne testy istotności

- Testy zgodności
 - Test zgodności chi-kwadrat
 - Test zgodności λ -Kołmogorowa
 - Test zgodności Kołmogorowa-Smirnowa
 - Test zgodności Craméra-von Misesa
 - Test zgodności Andersona-Darlinga

Populacja normalna o nieznanym parametrach. I

Należy zweryfikować hipotezę, że wariancja σ^2 w tej populacji ma ustaloną wartość σ_0^2 .

$$H_0 : \quad \sigma^2 = \sigma_0^2,$$

$$H_1 : \quad \sigma^2 > \sigma_0^2 \quad (\text{większe zróżnicowanie}).$$

Stosujemy statystykę $\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$, która ma rozkład $\chi^2(n-1)$. Obszar krytyczny, dla poziomu istotności α , wyznacza równość

$$P_{(m, \sigma^2)}(\{\chi^2 \geq \chi_{\alpha, n-1}^2\}) = \alpha.$$

Jeżeli wartość statystyki z próby przekroczy wartość krytyczną, to odrzucamy hipotezę zerową na korzyść alternatywnej. W przeciwnym wypadku nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Populacja normalna o nieznanym parametrach. II

Przykład ([1, Przykład 11.6])

Chcemy sprawdzić czy odchylenie standardowe w rozkładzie czasu montowania elementu T w prasce automatycznej rzeczywiście wynosi $\sigma = 1,5$. Przyjmij poziom istotności $\alpha = 0,1$.

ROZWIĄZANIE.

$$H_0 : \sigma^2 = 2,25,$$

$$H_1 : \sigma^2 > 2,25.$$

W badanej grupie 25 robotników otrzymano wariancję z próby $s^2 = 2,8$. Obliczając statystykę otrzymujemy $\chi^2 = \frac{(25-1) \cdot 2,8}{2,25} = 29,87$. Otrzymujemy $\chi_{0,1;24}^2 = 33,196$. Tak więc wartość statystyki z próby znalazła się poza obszarem krytycznym, więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.



Populacja normalna o nieznanym parametrach. III

Uwaga

- 1 Dla $n - 1 > 30$ obszar krytyczny testu wariancji należy budować na podstawie rozkładu normalnego.
- 2 Zamiast statystyki $\chi^2 = \frac{nS^2}{\sigma^2}$ można stosować statystykę $\chi^2 = \frac{(n-1)\tilde{S}^2}{\sigma^2}$.

Populacje normalne $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. I

Nieznane są wartości oczekiwane i odchylenia standardowe.

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2,$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Alternatywnie hipotezę zerową i alternatywą można sformułować:

$$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1,$$

$$H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1.$$

Do weryfikacji hipotezy zerowej używamy wariancji \tilde{s}_1^2 i \tilde{s}_2^2 , obliczanych z dwóch niezależnych prób, o liczebnościach równych odpowiednio n_1 i n_2 .

Stosujemy statystykę $F = \frac{\frac{\tilde{s}_1^2}{\sigma_1^2}}{\frac{\tilde{s}_2^2}{\sigma_2^2}}$ o rozkładzie $F(n_1 - 1, n_2 - 1)$.

Populacje normalne $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. II

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej mamy $F = \frac{\check{S}_1^2}{\check{S}_2^2}$.

Prawostronna część obszaru krytycznego opisana jest zależnością

$$P(\{F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}\}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Natomiast lewostronna część obszaru krytycznego ma postać

$$P(\{F \leq F_{\frac{\alpha}{2}}\}) = \frac{\alpha}{2}.$$

Uwaga

W tablicach jest tylko $F_{\frac{\alpha}{2}}$, zatem w statystyce F w liczniku umieszczamy większą z wariancji obu prób. Obliczoną tak wartość F porównujemy z $F_{\frac{\alpha}{2}}$. Jeżeli jest spełniona nierówność $F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}$, to odrzucamy hipotezę zerową.

Populacje normalne $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. III

Jeżeli

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2,$$

$$H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2,$$

to

$$F = \frac{\tilde{S}_1^2}{\tilde{S}_2^2}.$$

Natomiast jeżeli

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2,$$

$$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2,$$

to

$$F = \frac{\tilde{S}_2^2}{\tilde{S}_1^2}.$$

Populacje normalne $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. IV

W obu przypadkach mamy prawostronny obszar krytyczny

$$P(\{F \geq F_\alpha\}) = \alpha.$$

Przykład ([1, Przykład 11.7])

Sprawdzić, czy słuszne jest założenie o równości odchyłeń standardowych wieku w populacji kupujących wyroby nowe i znane, dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$.

ROZWIĄZANIE. Wtedy $\frac{\alpha}{2} = 0,025$. Ponadto mamy

$$H_0 : \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2,$$

$$H_1 : \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

Ponadto mamy

$$F = \frac{\tilde{s}_2^2}{\tilde{s}_1^2} = \frac{39,69}{30,25} = 1,31 \quad \text{oraz} \quad F_{0,025;21;19} = 2,49.$$

Populacje normalne $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. V

Tak więc brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej ($1,31 < 2,49$).



Spis treści

1 Testowanie hipotez

- Testy istotności dla wariancji
- Testy istotności dla dwóch wariancji

2 Nieparametryczne testy istotności

- Testy zgodności
 - Test zgodności chi-kwadrat
 - Test zgodności λ -Kołmogorowa
 - Test zgodności Kołmogorowa-Smirnowa
 - Test zgodności Craméra-von Misesa
 - Test zgodności Andersona-Darlinga

Klasyfikacja nieparametrycznych testów istotności

Nieparametryczne testy istotności dzielimy na

- 1 testy losowości – weryfikują hipotezę, że próba ma charakter losowy,
- 2 testy niezależności – sprawdzają hipotezę o niezależności dwóch zmiennych losowych,
- 3 testy zgodności – weryfikują hipotezę o postaci funkcyjnej rozkładu populacji generalnej,
- 4 inne.

Test zgodności sprawdza zgodność rozkładu empirycznego z próby z rozkładem hipotetycznym lub też zgodność dwóch lub więcej rozkładów empiryczny z próby.

Test zgodności chi-kwadrat. I

Najczęściej stosowanymi nieparametrycznymi testami są testy zgodności chi-kwadrat.

Test ten zbudowany jest na podstawie statystyki χ^2 . Mamy

$H_0 : F = F_0$ (populacja generalna ma rozkład określony
pewną dystrybuantą F_0),

$H_1 : F \neq F_0$.

Zasady przeprowadzania testu chi-kwadrat

- 1 Losujemy z populacji dużą próbę (będziemy wykorzystywać rozkład graniczny statystyki).
- 2 Budujemy szereg rozdzielczy – tworzymy r rozłącznych klas wartości badanej cechy (zmiennej) w próbie (liczebność i -tej klasy wynosi n_i).
- 3 Zakładamy prawdziwość hipotezy zerowej.

Test zgodności chi-kwadrat. II

- Obliczamy prawdopodobieństwa p_i tego, że badana cecha przyjmie wartości z i - tej klasy. Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej liczebności poszczególnych klas powinny wynosić np_i dla $i = 1, \dots, r$, gdzie n liczebność próby.

Uwagi

- Podstawą konstrukcji miary zgodności rozkładu empirycznego z hipotetycznym jest różnica między liczebnościami zaobserwowanymi n_i , a liczebnościami hipotetycznymi np_i .
- Do oceny zgodności stosujemy statystykę

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i},$$

która przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej ma asymptotyczny rozkład $\chi^2(r - k - 1)$, gdzie k jest liczbą parametrów

Test zgodności chi-kwadrat. III

rozkładu, które zostały oszacowane na podstawie próby metodą największej wiarygodności.

- 3 Jeżeli prawdziwa jest hipoteza zerowa, to dla poziomu istotności α mamy

$$P(\{\chi^2 \geq \chi_{\alpha}^2\}) = \alpha.$$

- 4 Jeżeli wartość statystyki z próby jest nie mniejsza niż wartość krytyczna (odpowiada to temu, że różnica między rozkładem empirycznym, a hipotetycznym jest statystycznie istotna), to hipotezę zerową odrzucamy.

Test zgodności chi-kwadrat. IV

Przykład

[1, Przykład 11.10] Przez 300 dni obserwowano pracę pewnej maszyny, rejestrując liczbę uszkodzeń w ciągu dnia. Otrzymano następujące dane

liczba uszkodzeń (x_i)	liczba dni (n_i)
0	140
1	110
2	30
3	10
4	10

Zweryfikujemy hipotezę, że liczba uszkodzeń ma rozkład Poissona.

ROZWIĄZANIE. Określamy wartość parametru λ dla rozkładu Poissona. Estymatorem λ otrzymanym MNW² jest średnia arytmetyczna z próby \bar{X} . W naszym przypadku wynosi ona $\bar{x} = 0,8$.

Test zgodności chi-kwadrat. V

Mamy

$$P(\{X = k\}) = \frac{(0,8)^k}{k!} e^{-0,8}, \text{ dla } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Konstrukcja tabeli roboczej

i	x_i	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0	140				
2	1	110				
3	2	30				
4	3	10				
5	≥ 4	10				
Σ		300				

Test zgodności chi-kwadrat. VI

i	x_i	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0	140	0,449	134,7	28,09	0,209
2	1	110	0,359	107,7	5,29	0,049
3	2	30	0,144	43,2	174,24	4,033
4	3	10	0,038	11,4	1,96	0,1719
5	≥ 4	10	0,010			
Σ		300	1			

Test zgodności chi-kwadrat. VII

i	x_i	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0	140	0,449	134,7	28,09	0,209
2	1	110	0,359	107,7	5,29	0,049
3	2	30	0,144	43,2	174,24	4,033
4	3	10	0,038	11,4	1,96	0,1719
5	≥ 4	10	0,010	3,0		
Σ		300	1			

Test zgodności chi-kwadrat. VIII

Z rozkładu asymptotycznego musi być tak, że $np_i \geq 5$, więc łączymy dwie ostatnie klasy tworząc nową tablicę roboczą.

i	x_i	n_i	p_i	np_i	$(n_i - np_i)^2$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
1	0	140	0,449	134,7	28,09	0,209
2	1	110	0,359	107,7	5,29	0,049
3	2	30	0,144	43,2	174,24	4,033
4	≥ 3	20	0,048	14,4	31,36	2,178
Σ		300	1	300		$\chi^2 = 6,469$

Przyjmując poziom istotności $\alpha = 0,05$ i mając $r - k - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$ więc $\chi_{0,05;2}^2 = 5,991$. Na podstawie danych odrzucamy hipotezę zerową.

Test zgodności chi-kwadrat. IX

Uwaga

Gdyby dany był parametr λ , to wartość krytyczną należałoby określić dla $r - 1$ stopni swobody.

²Metoda największej wiarygodności.

Test zgodności λ -Kołmogorowa. I

Uwaga

Test ten może być stosowany tylko w przypadku ciągłej dystrybuanty teoretycznej.

Definicja (Przypomnienie)

Dystrybuantą empiryczną F_n nazywamy funkcję określoną na podstawie danych (x_i, ω_i) dla $i = 1, \dots, k$ wzorem

$$F_n(x) = \sum_{i: x_i \leq x} \omega_i, \quad (1)$$

gdzie $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ są wagami x_i .

Zasady/etapy konstrukcji testu λ -Kołmogorowa

Test zgodności λ -Kolmogorowa. II

- 1 Formułujemy hipotezę zerową i alternatywną

$$H_0 : F = F_0,$$

$$H_1 : F \neq F_0.$$

- 2 Losujemy dużą próbę n elementową oraz budujemy szereg przedziałowy z dużą ilością wąskich klas.
- 3 Wyznaczamy dystrybuantę empiryczną.
- 4 Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej różnice między dystrybuanta empiryczna, a hipotetyczną nie powinny być duże. Miarą zgodności obu dystrybuant jest statystyka $\lambda = D\sqrt{n}$, gdzie $D = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$.
Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka λ ma asymptotyczny rozkład λ - Kolmogorowa z obszarem krytycznym

Test zgodności λ -Kolmogorowa. III

wyznaczonym przez równość $P(\{\lambda \geq \lambda_\alpha\}) = \alpha$ z poziomem istotności α .

Jeżeli na podstawie próby otrzymamy wartość nie mniejszą niż wartość krytyczna ($\lambda \geq \lambda_\alpha$) to hipotezę zerową odrzucamy.

Test zgodności λ -Kolmogorowa. IV

Przykład ([1, Przykład 11.11])

Przypuśćmy, że jednostkowe koszty produkcji danego wyrobu mają rozkład normalny. W celu weryfikacji tego przypuszczenia zbadano próbę 200 zakładów produkujących ten wyrób otrzymując następujące dane

i	koszty jednostkowe	liczba zakładów (n_i)
1	2, 50 – 3, 50	5
2	3, 50 – 4, 50	10
3	4, 50 – 5, 50	35
4	5, 50 – 6, 50	80
5	6, 50 – 7, 50	50
6	7, 50 – 8, 50	10
7	8, 50 – 9, 50	10

Test zgodności λ -Kolmogorowa. V

Zweryfikujemy hipotezę, że rozkład jednostkowego kosztu produkcji tego wyrobu ma rozkład normalny.

ROZWIĄZANIE. Standaryzujemy górne granice klas, gdyż potrzebujemy m i σ , które oszacujemy na podstawie próby $m = \bar{x} = 6,15$ i $\sigma = s = 1,216$.

Etapy obliczania statystyki D (budowanie pomocniczej tablicy).

Do konstrukcji potrzebna będzie nam standaryzowana zmienna losowa.

Definicja

Wartość standaryzowana odpowiadająca obserwacji x wyraża się wzorem

$$u = \frac{x - \bar{x}}{s}. \quad (2)$$

Test zgodności λ -Kolmogorowa. VI

Budowania pomocniczej tablicy

i	x	u	$\Phi(u) = F_0(x)$	ω_i	$F_n(x)$	$ F_n(x) - F_0(x) $
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
Σ						

Test zgodności λ -Kolmogorowa. VII

i	x	u	$\Phi(u) = F_0(x)$	ω_i	$F_n(x)$	$ F_n(x) - F_0(x) $
1	3,50	-2,18	0,015	0,025	0,025	0,010
2	4,50					
3	5,50					
4	6,50					
5	7,50					
6	8,50					
7	9,50					
Σ						

Test zgodności λ -Kolmogorowa. VIII

i	x	u	$\Phi(u) = F_0(x)$	ω_i	$F_n(x)$	$ F_n(x) - F_0(x) $
1	3,50	-2,18	0,015	0,025	0,025	0,010
2	4,50	-1,36	0,087	0,050	0,075	0,012
3	5,50	-0,54	0,295	0,175	0,250	$\lambda = 0,045$
4	6,50	0,29	0,614	0,400	0,650	0,036
5	7,50	1,11	0,867	0,250	0,900	0,033
6	8,50	1,93	0,973	0,050	0,950	0,023
7	9,50	2,76	0,997	0,050	1,000	0,003
Σ				1		

Mamy $D = 0,045$ oraz $\lambda = 0,045 \cdot \sqrt{200} = 0,637$. Dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$ mamy $\lambda_\alpha = 1,36$. Tak więc nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.



Test zgodności λ -Kolmogorowa. IX

Uwaga

Tablice rozkładu λ - Kolmogorowa podają wartość dystrybuant $K(\lambda)$. λ_α otrzymujemy z warunku $K(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$.

Test zgodności Kołmogorowa-Smirnowa. I

Test zgodności Kołmogorowa-Smirnowa służy do weryfikacji hipotezy, że dwie populacje mają jednakowy rozkład (dwie próby pochodzą z tej samej populacji).

Niech dwie populacje mają rozkłady opisane dystrybuantami F_1 i F_2 .

Zasady konstrukcji testu Kołmogorowa-Smirnowa

- 1 Formułujemy hipotezę zerową i alternatywną

$$H_0 : F_1 = F_2,$$

$$H_1 : F_1 \neq F_2.$$

- 2 Losujemy duże próby n_1 elementową z populacji pierwszej i n_2 elementową z populacji z populacji drugiej.
- 3 Wyznaczamy dystrybuanty empiryczne F_{n_1} i F_{n_2} .

Test zgodności Kołmogorowa-Smirnowa. II

- 4 Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej różnica między dystrybuantami nie powinny być duże. Miarą zgodności obu dystrybuant jest statystyka $\lambda = D^* \sqrt{n}$, gdzie $D^* = \sup_x |F_{n_1}(x) - F_{n_2}(x)|$, a $n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$.
- 5 Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka λ ma asymptotyczny rozkład λ - Kołmogorowa z obszarem krytycznym wyznaczonym przez równość $P(\{\lambda \geq \lambda_\alpha\}) = \alpha$ z poziomem istotności α . Jeżeli na podstawie próby otrzymamy wartość nie mniejszą niż wartość krytyczna λ_α , to hipotezę zerową odrzucamy.

Test Craméra-von Misesa. I

Test Craméra-von Misesa – test zgodności rozkładu z zadany­m rozkładem wzorcowym lub drugą próbą. Zwykle stosuje się go do sprawdzenia zgodności z rozkładem normalnym. Został zaproponowany przez Haralda Craméra i Richarda von Mises w latach 1928-1930.

Statystyka Craméra-von Misesa

1 Wersja dla jednej próby i rozkładu wzorcowego.

$$W^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dF(x),$$

gdzie F_n to dystrybuanta empiryczna, F dystrybuanta rozkładu wzorcowego, a n to liczebność próby.

Test Craméra-von Misesa. II

Zwykle do obliczeń używany jest prostszy wzór:

$$W^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(F(X_{(i)}) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2,$$

gdzie $X_{i:n}$ to i -ta statystyka pozycyjna, F i n mają te same znaczenie, jak poprzednio.

- 2 **Wersja dla dwóch prób.** Niech x_1, x_2, \dots, x_n i y_1, y_2, \dots, y_m będą obserwowanymi wartościami w pierwszej i drugiej próbie posortowane rosnąco. Niech r_1, r_2, \dots, r_n będą rangami obserwacji x_i w połączonej próbie (X i Y rangowane razem) i niech s_1, s_2, \dots, s_m będą rangami obserwacji y_i w połączonej próbie. Wówczas

$$W^2 = \frac{U}{nm(n+m)} - \frac{4mn-1}{6(m+n)},$$

Test Craméra-von Misesa. III

gdzie

$$U = n \sum_{i=1}^n (r_i - i)^2 + m \sum_{j=1}^m (s_j - j)^2.$$

Test Andersona-Darlinga. I

Test Andersona-Darlinga – test zgodności rozkładu z zadany­m rozkładem wzorcowym. Zwykle stosuje się go do sprawdzenia zgodności z rozkładem normalnym. Jest modyfikacją testu Craméra-von Misesa dokonaną w celu poprawy jego czułości w „ogonach” testowanego rozkładu.

Statystyka Andersona-Darlinga

$$A^2 = n \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(F_n(x) - F(x))^2}{F(x)(1 - F(x))} dF(x),$$

gdzie F_n to dystrybuanta empiryczna, F to dystrybuanta rozkładu wzorcowego, a n to liczebność próby.

Jest to zatem wersja testu Craméra-von Misesa ważona czynnikiem $\frac{1}{F(x)(1-F(x))}$.

Test Andersona-Darlinga. II

Zwykle do obliczeń używany jest prostszy wzór

$$A^2 = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n ((2i-1) \ln F(X_{i:n}) + (2n+1-2i) \ln(1-F(X_{i:n})))$$

lub (inna wersja)

$$A^2 = -n - \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} \left[\ln F(X_{i:n}) + \ln \left(1 - F(X_{(n+1-i):n}) \right) \right],$$

gdzie $X_{i:n}$ to i -ta statystyka pozycyjna, F i n mają te same znaczenie, jak poprzednio.

Dla rozkładu normalnego stosuje się czasem poprawkę na wielkość próby

$$A^{2*} = A^2 \left(1 + \frac{0,75}{n} + \frac{2,25}{n^2} \right).$$

Test Andersona-Darlinga. III

Dla rozkładu normalnego, gdy A^{2*} przekracza 0.752 to hipoteza o normalności rozkładu w populacji jest odrzucana na poziomie 5%. Dla innych rozkładów test także może być stosowany, ale ma inne wartości krytyczne.



J. Józwiak i J. Podgórski. *Statystyka od podstaw*. Wyd. 5 zmienione. Warszawa: PWE, 2000.