

Lista pierwsza* †
Metody probabilistyczne i statystyka
kierunek: Informatyka, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

wersja z dnia 2 marca 2020

1 Elementy kombinatoryki

Zadanie 1. Do windy w 8 piętrowym wieżowcu wsiadły 3 osoby. Na ile różnych sposobów mogły one wysiąść, jeśli każda z nich wysiada na

- dowolnym piętrze;
- innym piętrze;
- wszyscy wysiądą na tym samym piętrze.

Zadanie 2. Do windy w 9 piętrowym wieżowcu wsiadły 2 osoby. Na ile sposobów mogły one wysiąść?

Zadanie 3. Do windy w 10 piętrowym wieżowcu wsiadły 2 osoby. Na ile różnych sposobów mogły one wysiąść różnych piętrach?

Zadanie 4. Winda z 5 pasażerami zatrzymuje się na 10 piętrach. Na ile sposobów pasażerowie mogą wysiąść z windy? Na ile sposobów mogą to zrobić, jeżeli każdy ma wysiąść na innym piętrze?

Zadanie 5. Do windy w 55 piętrowym drapaczu chmur wsiadło 11 osób. Ile jest możliwych sposobów, aby co najmniej dwie osoby wysiadły na tym samym piętrze?

Zadanie 6. Dany jest sześcián. Ze wszystkich wierzchołków sześciánu losujemy 3 tworząc trójkąt. Ile jest możliwości takich losowań?

Zadanie 7. Ile jest kombinacji z powtórzeniami ze zbioru 10 elementowego, gdy losujemy dwa elementy?

Zadanie 8. W turnieju w którym uczestniczy 20 graczy, każdy z nich gra po jednej partii z innym. Ile partii rozegrano?

Zadanie 9. Dzieci łączą się w pary. Ilu dzieci wzięło udział w zabawie, jeżeli wiadomo iż mogły się one połączyć na 120 sposobów?

Zadanie 10. Na turnieju rozegrano 190 meczy każdy z każdym. Ilu zawodników uczestniczyło w turnieju?

Zadanie 11. Ilu zawodników wzięło udział w turnieju szachowym, jeżeli każdy grał z każdym dokładnie 1 partię i w całym turnieju rozegrano ich 10?

Zadanie 12. W turnieju szachowym bierze udział n zawodników. $n - 2$ rozegrało każdy z każdym po jednej partii, " $n - 1$ -szy" rozegrał 10 partii a " n -ty" 1 partię. łącznie rozegrano 55 partii. Ile jest zawodników? Czy " $n - 1$ -szy" i " n -ty" grali już ze sobą?

Zadanie 13. Ile można wykonać chorągwi mającej trzy pasy kolorów z 4 barw?

Zadanie 14. Dane jest 7 gatunków cukierków czekoladowych, z których wybieramy 4 rodzaje. Ile różnych paczek w ten sposób można otrzymać?

Zadanie 15. Rzucamy 5 kostkami do gry. Ile jest możliwych wszystkich wyników?

*©J.Kotowicz

†Zadania 85–101 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej ze strony znajdującej się pod adresem <http://math.uwb.edu.pl/%7Euostasze/rachii16.html>.

Zadanie 16. Rok liczy 365 dni. Ile jest możliwych wszystkich wyników, tak aby 5 osób urodziło się każda innego dnia?

Zadanie 17. W urnie znajduje się 5 ponumerowanych kul. Losujemy 5 kul po jednej bez zwracania. Ile można otrzymać różnych wyników?

Zadanie 18. W klasie liczącej 37 uczniów rozlosowano trzy jednoosobowe bilety do trzech różnych teatrów. Ile jest możliwych wyników tego losowania?

Zadanie 19. Grupę składającą się z 25 osób podzielono na dwie podgrupy po 13 i 12 osób. Ile jest możliwych podziałów?

Zadanie 20. Grupę 6 osobową podzielono na dwie równoliczne. Ile było możliwych podziałów?

Zadanie 21. Ile jest możliwości trafienia prawidłowo przez gracza w multilotka 10 właściwych liczb?

Zadanie 22. Grupa taneczna składa się z 12 chłopców i 12 dziewcząt. Ile różnych par można utworzyć z nich wszystkich, aby mogli oni zatańczyć poloneza?

Zadanie 23. W ogłoszonym plebiscycie na 10 najlepszych sportowców zgłoszono 17 kandydatów. Plebiscyt wygrał R. Szurkowski. Oblicz ile istnieje sposobów przyznania dalszych miejsc, jeżeli sportowcy nie mogą zajmować tego samego miejsca.

Zadanie 24. W biegu na 100 m startuje 6 zawodników. Ile jest możliwych wyników ukończenia biegu, jeśli punktowane są pierwsze trzy miejsca i nie uwzględniamy wyników *ex aequo*?

Zadanie 25. Rozmieszczamy 8 kul w 3 szufladach. Ile jest możliwych różnych rozmieszczeń? Które model z poprzedniego zadania można stosować rozwiązując to zadanie? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 26. Iloza sposobami można włożyć m jednakowych kul do k komórek?

Zadanie 27. Iloza sposobami można posadzić w rzędzie m drzew liściastych i n iglastych ($m > n$) tak, aby żadne dwa drzewa iglaste nie sąsiadowały ze sobą?

Zadanie 28. Z klasy liczącej 20 osób wybieramy delegację składającą się z 3 osób. Na ile różnych sposobów można ją wybrać?

Zadanie 29. Z 12 dziewcząt i 8 chłopców należy wybrać delegację liczącą 2 dziewczynki i 1 chłopca. Na ile różnych sposobów można ją wybrać?

Zadanie 30. W pudełku znajduje się 20 śrub wśród których są 3 wadliwe. Wylosowano 5 śrub. Oblicz ilość możliwości, że otrzymano dokładnie 1 wadliwą.

Zadanie 31. Na płaszczyźnie danych jest 12 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Ile jest różnych prostych przechodzących przez dokładnie dwa punkty?

Zadanie 32. Na płaszczyźnie danych jest n punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Ile jest różnych prostych przechodzących przez dokładnie dwa punkty.

Zadanie 33. Dany jest sześciąt. Ze wszystkich wierzchołków sześciąta losujemy 3 tworząc trójkąt. Ile jest możliwości takich losowań?

Zadanie 34. Ile można skonstruować trójkątów z odcinków o długościach równych: 5, 7, 9, 11, 13?

Zadanie 35. Na ile sposobów można rozdzielić grupę $k + m + n$ różnych przedmiotów na grupy po k , po m i po n przedmiotów odpowiednio?

Zadanie 36. Jak długie powinny być znaki w alfabecie Morsa, aby zapisać 24 literowy alfabet?

Zadanie 37. Jak długie powinny być znaki w alfabecie Morsa, aby zapisać wszystkie litery alfabetu polskiego?

Zadanie 38. Ile jest różnych tablic rejestracyjnych samochodów składających się z 3 liter i 4 cyfr (24 litery), jeśli

- ustawienie tablica jest jak w Polsce;
- możemy mieszać kolejność liter i cyfr.

Zadanie 39. Ile słów z sensem lub bez można utworzyć z liter tworzących to słowo

- mama?
- abrakadabra?

- bajkopisarka?
- panna?

Zadanie 40. Na półce ustawiamy dwie nierozróżnialne encyklopedie 13 tomowe. Na ile sposobów można je ustawić?

Zadanie 41. Na ile sposobów można ustawić encyklopedię 13 tomową na półce tak, aby tomy

- 1 i 2;
- 1, 2 i 3;
- trzy wybrane losowo

stały obok siebie?

Zadanie 42. Ile różnych liczb dwucyfrowych można utworzyć ze pięcioelementowego zbioru cyfr?

Zadanie 43. Ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć ze zbioru cyfr od 1 do 9?

Zadanie 44. Ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć ze zbioru wszystkich cyfr?

Zadanie 45. Ile liczb czterocyfrowych można utworzyć z cyfr 2, 2, 4, 4, 6, 6?

Zadanie 46. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych nieparzystych, jeśli cyfry

- nie mogą się powtarzać;
- mogą się powtarzać?

Zadanie 47. Ile różnych liczb czterocyfrowych można utworzyć z cyfr 1, 2, ..., 7, jeśli cyfry nie mogą się powtarzać?

Zadanie 48. Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, jeśli jedynie cyfry 1 i 2 mogą się tylko powtarzać?

Zadanie 49. Ile różnych liczb pięciocyfrowych można utworzyć z cyfr 0, 1, 2, 3, 4, jeśli

- żadna z cyfr się nie powtarza?
- cyfry mogą się powtarzać?

Zadanie 50. Ile różnych liczb sześciocyfrowych można utworzyć ze wszystkich cyfr?

Zadanie 51. Ile różnych liczb sześciocyfrowych parzystych można utworzyć ze wszystkich cyfr, jeśli cyfry mogą się powtarzać?

Zadanie 52. Ile różnych liczb ośmiocyfrowych można utworzyć z cyfr tworzących liczbę 12212122?

Zadanie 53. Na ile sposobów można rozdać 13 kart z talii liczącej 52 karty?

Zadanie 54. Z tali liczącej 52 karty wylosowano 13 kart. Ile było możliwych wyników takich losowań, jeśli otrzymano

- dokładnie 1 asa;
- asa kier;
- dokładnie 3 asy w tym asa pik;
- dokładnie 1 asa, 3 króle i 2 damy;
- dokładnie wszystkie karty jednego koloru.
- 5 asów.

Zadanie 55. Ile jest możliwości, że brydżysta otrzyma dokładnie

- damę pik, asa tref, 5 kierów?
- damę pik, asa tref i 5 trefli?
- wszystkich kart tego samego koloru?
- dokładnie 12 kart tego samego koloru?

Zadanie 56. Z tali liczącej 52 karty wybieramy 9 kart. Ile było takich losowań, że otrzymano dokładnie 1 asa?

Zadanie 57. Na egzamin wykładowca przygotował 60 pytań, z których student losuje dokładnie 3. Ile jest wszystkich możliwych wyników takiego losowania?

Zadanie 58. 4 studentów zdaje egzamin. Na ile sposobów mogą oni otrzymać oceny jeśli wiadomo, że żaden ze studentów nie otrzymał oceny niedostatecznej?

Zadanie 59. Na ile sposobów można ustawić 8 wież tak, aby nie mogły się zbić?

Zadanie 60. Ile różnych sznurów koralu można ułożyć z 6 karali czarnych i 4 białych, jeśli ustaliliśmy początek sznura?

Zadanie 61. Na ile sposobów można rozmieścić w 3 szufladach 5 koszul?

2 Przestrzeń probabilistyczna

Zadanie 62. Praca mechanika polega na zabezpieczeniu technicznej sprawności trzech maszyn: M_1, M_2, M_3 w ciągu odcinka czasu. W czasie tym każda z maszyn pracuje niezawodnie, albo wymaga interwencji mechanika. Niech $A_j, j = 1, 2, 3$ oznacza zdarzenie: maszyna M_j wymaga interwencji mechanika.

- Określić przestrzeń zdarzeń elementarnych.
- Za pomocą zdarzeń elementarnych opisać zdarzenia $A_1, A'_1, A_2, A'_2, A_3, A'_3$.
- Za pomocą działań: $\cup, \cap, '$, wykonywanych na zdarzeniach A_j opisać zdarzenia B_j , jeżeli oznaczymy:
 - B_1 – zajście wszystkich trzech zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_2 – niezajście żadnego ze zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_3 – zajście tylko zdarzenia A_1 ,
 - B_4 – zajście tylko jednego spośród zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_5 – zajście co najmniej jednego ze zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_6 – zajście tylko zdarzeń A_1 i A_2 ,
 - B_7 – zajście dokładnie dwóch zdarzeń spośród zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_8 – zajście co najmniej dwóch zdarzeń spośród zdarzeń A_1, A_2, A_3 ,
 - B_9 – zajście co najwyżej jednego zdarzenia spośród zdarzeń A_1, A_2, A_3 .
- Opisać określone wyżej zdarzenia B_j za pomocą zdarzeń elementarnych.
- Znaleźć liczbę $n(\alpha)$ wszystkich zdarzeń w tym doświadczeniu.

Zadanie 63. Stworzyć przestrzeń probabilistyczną doświadczenia z poprzedniego zadania zakładając, że wszystkie określone tam zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne.

Zadanie 64. Dla danych z poprzedniego zadania określić prawdopodobieństwo tego, że

- wszystkie 3 maszyny będą wymagały interwencji mechanika (zdarzenie A),
- dokładnie 2 maszyny będą wymagały interwencji mechanika (zdarzenie B).

Zadanie 65. Osoba X wykonuje pewną pracę w ciągu 4, 5, albo 6 godzin i może popełnić przy tym 0, 1, albo 2 błędy. Zakładając jednakowe prawdopodobieństwo dla każdego z 9 zdarzeń jednoelementowych, znaleźć prawdopodobieństwa następujący zdarzeń:

- praca zostanie wykonana w ciągu 4 godzin (zdarzenie A),
- praca zostanie wykonana bezbłędnie w czasie 6 godzin (zdarzenie B),
- praca zostanie wykonana w czasie 5 godzin najwyżej z jednym błędem (zdarzenie C),
- praca zostanie wykonana z co najwyżej jednym błędem (zdarzenie D).

Zadanie 66. Z n -elementowego zbioru A losujemy ze zwrotem k -elementów. Oblicz prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane elementy są różne.

Zadanie 67. Ze zbioru n elementów, wśród których jest n_1 elementów mających cechę C i $n_2 = n - n_1$ elementów nie mających tej cechy, losujemy dwukrotnie po jednym elemencie. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że obydwa elementy wylosowane mają cechę C . Przyjąć $n = 10, n_1 = 7$.

Zadanie 68. Opiekun 20-osobowej grupy studenckiej w której (jak się później okazało) było 8 studentów aktywnych społecznie, wytypował na okres dwu tygodni (aby dać czas poznanie się grupy) 3-osobowy samorząd studencki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że taki samorząd składać się będzie z samych studentów aktywnych społecznie?

Zadanie 69. Spośród cyfr $1, \dots, 9$ wylosowano bez zwrotu kolejno trzy cyfry: C_1, C_2, C_3 układając je w kolejności losowania w liczbę, która w układzie dziesiętnym ma zapis $C_1C_2C_3$. Przyjmując sensowne założenie, że wszystkie możliwe do otrzymania w ten sposób liczby są jednakowo prawdopodobne, obliczyć prawdopodobieństwo tego, że $C_1C_2C_3 < 444$.

Zadanie 70. Na trzech kolejnych zmianach dokonuje się przeglądu technicznego 2 spośród 6 maszyn, które należy poddać temu przeglądowi. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu tych trzech zmian wszystkie maszyny zostały poddane przeglądowi, gdyby kolejne zmiany nie przekazywały sobie informacji.

Zadanie 71. Trzy ściany czworościanu zostały pomalowane na białą, czerwono i zielono zaś czwarta w pasy białoczerwono-zielone. Doświadczenie polega na rzucaniu czworościanu na płaszczyznę i obserwowaniu koloru ściany, na którą upadł czworościan. Zdarzenia B , C , Z określono następująco

B – czworościan upadł na ścianę białą,

C – czworościan upadł na ścianę czerwoną,

Z – czworościan upadł na ścianę zieloną.

3 Prawdopodobieństwo kombinatoryki

Zadanie 72. Oblicz prawdopodobieństwo, że wśród n przypadkowo dobranych osób żadne dwie nie obchodzą urodzin tego samego dnia ($n \leq 365$).

Zadanie 73. Rok liczy 365 dni. Oblicz prawdopodobieństwo, że 3 losowo wybrane panie

- urodziły się tego samego dnia;
- pierwsza w styczniu, druga w marcu, a trzecia w drugim półroczu.

Zadanie 74. Oblicz prawdopodobieństwo, że spośród 29 osób ich miesiące urodzeń będą rozmieszczone następująco: 7 miesięcy zwiera dokładnie po dwie daty, a 5 miesięcy dokładnie po 3.

Zadanie 75. Grupę liczącą 13 osób podzielono na dwie po 6 i 7 osób. Oblicz prawdopodobieństwo, że osoby A i B będą w tej samej grupie.

Zadanie 76. Samorząd klasowy składa się z 6 uczniów i 4 uczennic. Spośród członków samorządu wybieramy losowo delegację składającą się z 5 osób. Oblicz prawdopodobieństwo, że delegacja będzie składała się z dokładnie z 3 uczennic i 2 uczniów.

Zadanie 77. Grupę liczącą 14 osób podzielono na dwie po 7 osób. Oblicz prawdopodobieństwo, że osoby A i B będą w tej samej grupie.

Zadanie 78. Pięciu chłopców i dwie dziewczynki ustawiono w szereg. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że dziewczynki stoją obok siebie.

Zadanie 79. W zbiorze $2n$ liczb ($n \geq 1$) wyróżniono dwie. Czy bardziej prawdopodobne jest, że siadając losowo wokół stołu przy którym jest $2n$ miejsc, wyróżnione osoby znajdą się obok siebie, czy naprzeciw?

Zadanie 80. Przy okrągłym stole usiadło losowo 6 osób, wśród nich Adam i Ewa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie siedzą obok siebie?

Zadanie 81. Iloma sposobami można ustawić 6 osób

- w rząd
- w koło?

Zadanie 82. Pięć osób zajęło losowo miejsca w ośmioosobowym przedziale kolejowym. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwie wyróżnione osoby usiadły

- na sąsiednich miejscach?
- naprzeciwko siebie?

Zadanie 83. Zbiór $\{1, \dots, n\}$, ($n \geq 2$), dzielimy na dwa niepuste podzbiory. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że 1 i n będą w tym samym podzbiory.

Zadanie 84. Encyklopedię 13-to tomową podzielono na dwie grupy liczące po odpowiednio 7 i 6 tomów. Oblicz prawdopodobieństwo, że w pierwszej grupie są tomy od 1 to 3.

4 Zadania różne

Zadanie 85. Rzucamy dwiema kostkami. Niech zdarzenie A polega na tym, że suma wyników jest równa 4, a B - na tym, że przynajmniej na jednej kostce wypadła liczba parzysta. Opisać zdarzenie $A \cap B$.

Zadanie 86. Z talii 52 kart losujemy jedną. Z następujących zdarzeń wybrać pary zdarzeń wykluczających się:

- A - wylosowano króla,
- B - wylosowano pika,
- C - wylosowano kartę czerwoną,
- D - wylosowano kartę młodszą od 10.

Zadanie 87. Niech A, B, C będą zdarzeniami. Zapisz za pomocą działań na zbiorach następujące zdarzenia:

- zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A, B, C ;
- zachodzą dokładnie dwa zdarzenia spośród A, B, C ;
- zachodzą co najmniej dwa zdarzenia spośród A, B, C ;
- zachodzą nie więcej niż dwa zdarzenia spośród A, B, C .

Zadanie 88. Niech A i B będą zdarzeniami. Za pomocą A, B, A', B' i odpowiednich działań na zbiorach zapisać następujące zdarzenia spośród zdarzeń A, B

- zaszło co najmniej jedno,
- zaszły oba,
- zaszło tylko zdarzenie A ,
- zaszło dokładnie jedno, ale nie wiadomo które,
- nie zaszło żadne ze zdarzeń.

Zadanie 89. Niech $\Omega = [0, 1]$ oraz niech \mathcal{F} będzie pewnym σ -ciałem podzbiorów odcinka $[0, 1]$. Udowodnij, że funkcja

$$P(A) := \begin{cases} 1 & \text{gdy } \frac{1}{2} \in A \\ 0 & \text{gdy } \frac{1}{2} \notin A \end{cases}$$

określona na zbiorach $A \in \mathcal{F}$ spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.

Zadanie 90. Udowodnij własności prawdopodobieństwa.

Zadanie 91. Pokaż, że jeśli $P(A) = 0.7$ i $P(B) = 0.8$, to $P(A \cap B) \geq 0.5$.

Zadanie 92. Dane są $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ i $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Oblicz $P(B')$, $P(A \cap B')$ i $P(B \setminus A)$.

Zadanie 93. Dane są $P(A' \cap B') = \frac{1}{2}$, $P(A') = \frac{2}{3}$, ponadto $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Oblicz $P(B)$ i $P(A' \cap B)$.

Zadanie 94. Rzucamy niesymetryczną sześcienną kostką. Szóstka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{4}$, a pozostałe liczby mają równe szanse wypadnięcia. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie nieparzysta liczba oczek.

Zadanie 95. Dwóch piłkarzy chodzi niezbyt regularnie na treningi. Jeden opuszcza 40% zajęć, a drugi chodzi na 70%. Jednocześnie są na 40% treningów. Oblicz prawdopodobieństwo, że na treningu

- jest dokładnie jeden z nich,
- nie ma żadnego.

Zadanie 96. Niech $P(A) = x$, $P(B) = x^2$. Wiadomo, że oba zdarzenia się wykluczają, ale jedno z nich musi zajść. Oblicz x .

Zadanie 97. W wyniku doświadczenia możemy otrzymać jeden z trzech wzajemnie wykluczających się wyników: a, b, c . Niech prawdopodobieństwo otrzymania wyniku a lub b wynosi $\frac{2}{3}$, a wyniku b lub c $\frac{3}{4}$. Oblicz prawdopodobieństwa.

Zadanie 98. Wykaż, że jeśli $P(A) + P(B) \geq 1$, to A i B nie mogą się wykluczać.

Zadanie 99. Niech $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$. Czy zdarzenia A i B mogą się wykluczać?

Zadanie 100. Rzucamy niesymetryczną kostką sześcienną. Dwójka wypada z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, piątka $\frac{1}{5}$, a pozostałe liczby mają równe szanse wypadnięcia. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba oczek mniejsza niż 4.

Zadanie 101. Towarzystwo ubezpieczeniowe wypłaca z pewnej polisy 7 kategorii odszkodowań. Prawdopodobieństwo, że klient otrzyma wypłatę pierwszego typu jest równe $\frac{1}{3}$, pozostałe kategorie mają jednakowe szanse. Jakie jest prawdopodobieństwo, że klient otrzyma wypłatę typu 1 lub 3 lub 4 lub 7?