

Lista trzecia\*<sup>†</sup>  
Metody probabilistyczne i statystyka  
kierunek: Informatyka, studia I<sup>o</sup>

dr Jarosław Kotowicz  
wersja z dnia 8 marca 2020

## Spis treści

<b>1 Jednowymiarowa zmienna losowa</b>	<b>1</b>
1.1 Wyznaczanie rozkładów	1
1.2 Gęstości	3
1.3 Jednowymiarowy rozkład normalny	4
1.4 Funkcje zmiennych losowych	5
1.5 Parametry liczbowe i pozycyjne zmiennych losowych.	6
1.6 Nierówności związane z momentami.	7
<b>2 Zadania z list dr U. Ostaszewskiej</b>	<b>8</b>
2.1 Prawdopodobieństwo geometryczne	8
2.2 Zmienne losowe	8
2.3 Rozkłady	9
<b>3 Zadania z list prof. L.Uby</b>	<b>11</b>

## 1 Jednowymiarowa zmienna losowa

### 1.1 Wyznaczanie rozkładów

**Zadanie 1.** Z kwadratu o boku  $a$  losowane są dwa wierzchołki. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest długość odcinka łączącego te wierzchołki. Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 2.** Z sześciangu o krawędzi  $a$  losowane są trzy wierzchołki. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest pole trójkąta wyznaczonego przez te wierzchołki, którego wierzchołkami są one. Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 3.** Z kwadratu o boku  $a$  losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest odległość od najbliższego boku. Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 4.** Losujemy punkt z trójkąta równobocznego o boku  $a$ . Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego boku. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 5.** Dany jest prostokąt o bokach  $a, b$ , gdzie  $a < b$ . Z prostokąta losujemy punkt. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego dłuższego boku. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 6.** Dany jest prostokąt  $[0, 2] \times [0, 4]$ . Z prostokąta losujemy punkt. zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego dłuższego boku. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 7.** Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach  $1$  i  $2$ . Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 8.** Z okręgu o promieniu  $1$  losujemy dwa punkty  $P, Q$ . Wartością zmiennej losowej jest długość mniejszego łuku. Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $X$ .

\*©J.Kotowicz

<sup>†</sup>Zadania 85–93, 94–110, 111–123 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej ze strony znajdującej się pod adresem <http://math.uwb.edu.pl/%7Euostasze/rachie16.html>.

**Zadanie 9.** Z koła o promieniach 2 losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od brzegu koła. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 10.**  $A$  jest zdarzeniem losowym, które można zaobserwować w pojedynczym doświadczeniu  $P(A) = p > 0$ . Doświadczenia są w sposób niezależny wykonywane do tego momentu, kiedy  $A$  zostanie zaobserwowane po raz pierwszy. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest numer tego doświadczenia kiedy  $A$  zostało zaobserwowane pierwszy raz (lub kiedy zostały przerwane próby). Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 11.** Z pęku  $n$  kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 12.** Rzucamy raz symetryczną monetą. Zdarzeniu wypadł orzeł przyporządkowujemy liczbę 2, a wypadła reszka liczbę - 1. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 13.** Rzucamy dwoma symetrycznymi monetami. Zdarzeniu wypadły dwie reszki przyporządkowujemy liczbę 5, wypadły różne wyniki liczbę - 3, zaś wypadły dwa orły liczbę 1. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 14.** Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuczonych orłów. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 15.** W urnie znajdują się 4 kule białe i 4 czarne. Losujemy z urny jednocześnie 4 kule. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wylosowanych kul czarnych. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 16.** Rzucamy kostką i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby - 1,1, 0,1. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie wyrzuczonych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 17.** Rzucamy kostką i trzema symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby - 1,1, 0,1, - 1,0. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie wyrzuczonych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 18.** Rzucamy dwoma kostkami i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się liczby 0,1. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe wartości bezwzględnej różnicy wyrzuczonych oczek powiększonych o iloczyn wyników otrzymanych na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 19.** Rzucamy dwoma kostkami do gry i monetą na której są cyfry 0 i 1. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi sumy oczek i wyrzuczonej liczby na monecie. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 20.** Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby - 1,1. Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuczonych oczek. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 21.** Ze zbioru  $N$  ponumerowanych elementów losujemy ze zwracaniem  $n$  elementów ( $1 < n < N$ ). Niech  $X, Y$  będą zmiennymi losowymi przyjmującymi odpowiednio wartość największego i najmniejszego wylosowanego numeru. Wyznacz rozkłady  $X, Y$ .

**Zadanie 22.** Uczeń rzuca 4 razy do kosza. Prawdopodobieństwo umieszczenia piłki w koszu wynosi  $\frac{1}{4}$ . Wyznacz rozkład zmiennej losowej zmiennej losowej wyznaczonej przez ilość trafień do kosza.

**Zadanie 23.** Z odcinka  $[0, L]$  losowane są w sposób niezależny dwie liczby  $x_1, x_2$ . Wartością zmiennej losowej  $X$  jest liczba 1, jeżeli liczba  $r \in [0, L]$  leży pomiędzy punktami  $x_1, x_2$  i 0 w przeciwnym wypadku. Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 24.** Z kwadratu  $[0, 1] \times [0, 1]$  losowany jest punkt  $(x, y)$ . Wyznacz rozkłady zmiennych losowych  $X = \min\{x, y\}, Y = \max\{x, y\}$ .

**Zadanie 25.** Policz dystrybuanty dla zmiennych losowych od zadania 12

**Zadanie 26.** Rzucamy kostką i monetą. Opisz zmienną losową, jeśli przyjmują wartości równe

- sumie oczek na kostce i wypadłych liczb na monecie (orzeł - 0, reszka - 1),
- ilości wyrzuczonych oczek na kostce,
- iloczynowi ilości oczek na kostce i wypadłych liczb na monecie (orzeł - 0, reszka - 1).

**Zadanie 27.** Rzucamy dwoma kostkami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe sumie wyrzuczonych oczek na obu kostkach. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 28.** Dokonujemy 10 jednakowych prób, które są niezależne. W każdej z prób może pojawić się zdarzenie  $A$  z prawdopodobieństwem  $p$ , ( $0 < p < 1$ ). Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wystąpień zdarzenia  $A$ . Znajdź rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 29.** Do zadań 26 – 28 policz dystrybuanty zmiennej losowej.

**Zadanie 30.** Oblicz dystrybuantę zmiennej losowej rozkładu jednostajnego na odcinku  $]a, b[$ .

**Zadanie 31.** Zmienna losowa podlega rozkładowi według trapezu równoramiennego, o kącie nachylenia ramion  $\frac{\pi}{6}$ , przy czym  $a \leq x \leq b$ . Napisz równanie gęstości zmiennej losowej.

**Zadanie 32.** Dany jest odcinek  $(0, L)$  i punkt  $r$  należący do tego odcinka. Z odcinka losujemy dwa punkty  $x_1, x_2$ . Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartość 1, gdy punkt  $r$  znajduje się między wylosowanymi punktami oraz 0 w przeciwnym wypadku. Podaj rozkład  $X$ .

**Zadanie 33.** Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby  $-1, 1$ . Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 34.** Rzucamy dwiema kostkami do gry. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podaj jej rozkład.

**Zadanie 35.** Rzucamy kostką do gry i czworościanem na ścianach którego są liczby  $0, 0, 1, 2$ . Zmienna losowa przyjmuje wartości równe

- sumie,
- iloczynowi

wyrzuconych oczek i liczby wypadłej na czworościanie. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 36.** Do zadań 34 i 35 podaj dystrybuanty zmiennych losowych.

**Zadanie 37.** Losujemy punkt z trójkąta równobocznego o boku  $a$ . Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego boku. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 38.** Rzucamy trzema monetami na których znajdują się następujące liczby  $-1$  i  $1$ ,  $0$  i  $1$  oraz  $1$  i  $2$ . Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 39.** Podaj dystrybuantę do zadania 38.

**Zadanie 40.** Rzucamy kostką do gry i dwiema monetami. Na jednej z monet znajdują się liczby  $1$  i  $2$ , a na drugiej  $0$  i  $1$ . Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi otrzymanych oczek i wyrzuconych liczb na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 41.** Policz prawdopodobieństwo, że zmienna losowa z zadania 40 przyjmie wartości z przedziału  $(\sqrt{3}, \sqrt{9})$ .

**Zadanie 42.** Rzucamy dwoma kostkami do gry i monetą na której są cyfry  $0$  i  $1$ . Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi sumy oczek i wyrzuconej liczby na monecie. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 43.** Rzucamy kostką i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby  $-1, 1, 0, 1$ . Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 44.** Trójkąt równoramienny na płaszczyźnie jest utworzony przez wektor  $[1, 0]$  oraz inny wektor o długości  $1$  w kierunku losowym (wierzchołek trójkąta ma rozkład jednostajny na okręgu jednostkowym). Znajdź dystrybuantę i gęstość rozkładu zmiennej losowej mierzącej długość trzeciego boku.

## 1.2 Gęstości

**Zadanie 45.** Czy można dobrać parametr  $a$  tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policz ich dystrybuanty.

- $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [0, 4] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 4] \end{cases}$

- $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [-1, 4] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, 4] \end{cases}$

- $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{dla } x \in [0, 3] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 3] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot (2 - x) & \text{dla } x \in [0, a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, a] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} a & \text{dla } x \in [c, c + \frac{1}{a}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [c, c + \frac{1}{a}] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 1] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ ae^{-x} & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0, a] \\ x + 2 & \text{dla } x \in [0, a] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0, \frac{\pi}{4}] \\ a \cos x & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-1, a] \\ x & \text{dla } x \in [-1, a] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-a, a] \\ x^2 & \text{dla } x \in [-a, a] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x \in [-1, a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, a] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0, 1] \\ ax(2 + x) & \text{dla } x \in [0, 1] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-1, a] \\ x^2 + x & \text{dla } x \in [-1, a] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-a, a] \\ |x| & \text{dla } x \in [-a, a] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [-a, a] \\ \cos x & \text{dla } x \in [-a, a] \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin [0, a] \\ x^3 & \text{dla } x \in [0, a] \end{cases}$ ,

### 1.3 Jednowymiarowy rozkład normalny

**Zadanie 46.** Wyraż za pomocą dystrybuanty rozkładu normalnego znormalizowanego następujące prawdopodobieństwo  $P(\{\omega : |X(\omega)| < 3\})$ , jeśli zmienna losowa  $X \in \mathcal{N}(2, 3)$ .

**Zadanie 47.** Niech  $X \in \mathcal{N}(1, 1)$ . Wyznacz:

- $P(\{\omega : X(\omega)(1 - X(\omega)) > 0\})$ ,
- $P(\{\omega : X(\omega)(1 - X(\omega)) < 0\})$ ,
- $P(\{\omega : X(\omega)^3 - X(\omega) > 0\})$ ,
- $P(\{\omega : X(\omega)^3 - X(\omega) < 0\})$ ,

- $P(\{\omega : 1 < \frac{1}{|X(\omega)|} < 2\})$ .

**Zadanie 48.** Policz następujące prawdopodobieństwa rozkładu normalnego standaryzowanego:

- $P(\{\omega : X(\omega) \geq 3\})$ ,
- $P(\{\omega : |X(\omega) - 1| > 2\})$ ,
- $P(\{\omega : 1 < \frac{1}{|X(\omega)|} < 2\})$ .

**Zadanie 49.** Zmienna losowa  $X \in \mathcal{N}(3, 5)$ . Oblicz prawdopodobieństwo

- $P(\{\omega : \frac{1}{X(\omega)} - 1 > 0\})$ ,
- $P(\{\omega : X^3(\omega) - 1 > 0\})$ ,
- $P(\{\omega : \frac{1}{X(\omega)} - 1 > 0\})$ .

**Zadanie 50.** Zmienna losowa  $X \in \mathcal{N}(2, 4)$ . Wyraż prawdopodobieństwo

- $P(\{\omega : \frac{X(\omega)-2}{X(\omega)} > -1\})$ ,
- $P(\{\omega : (1 - X(\omega))X(\omega) > 0\})$ ,
- $P(\{\omega : X^2(\omega) - 1 > 0\})$ ,
- $P(\{\omega : \frac{X(\omega)-4}{X(\omega)} > 0\})$ .

za pomocą wartości dystrybuanty rozkładu normalnego standaryzowanego.

**Zadanie 51.**  $X$  ma rozkład  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Wykazać że  $P(X > 4) < 1/25000$

## 1.4 Funkcje zmiennych losowych

**Zadanie 52.**  $X$  jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku  $[0, 1]$ . Znajdź dystrybuantę i gęstość następujących zmiennych losowych

- $Y = aX + b$  gdzie  $a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ ,
- $Y = 2X^2 - 1$ ,
- $Y = \max\{X, 1 - X\}, Y = \min\{X, 1 - X\}$ ,
- $Y = -\ln(1 - X)$ ,
- $Y = -\ln X$ ,
- $Y = X^k, k \in \mathbb{N}$ ,

**Zadanie 53.**  $X$  ma rozkład wykładniczy ze współczynnikiem  $\lambda > 0$ . Znajdź gęstość rozkładu

- $Y = \{X\}$ , gdzie  $\{X\} = X - [X]$  oznacza część ułamkową,
- $Y = X^\alpha, \alpha > 0$ ,
- $Y = X^3$ ,
- $Y = 5X - 1$ ,
- $Y = 3X + 2$ ,
- $Y(\omega) = k^2$ , gdy  $k \leq X(\omega) < k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$

**Zadanie 54.**  $X$  ma rozkład normalny  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Jaki rozkład ma zmienna  $Y = aX + b$  gdzie  $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$ ?

## 1.5 Parametry liczbowe i pozycyjne zmiennych losowych.

**Zadanie 55.** Dane są 4 urny i 3 kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Oblicz

- rozkład zmiennej losowej,
- wartość oczekiwaną,
- wariancję zmiennej losowej.

**Zadanie 56.** Z sześciiany o krawędzi  $a$  wylosowano dwa wierzchołki. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości tych wierzchołków. Oblicz

- rozkład zmiennej losowej,
- wartość oczekiwaną,
- wariancję zmiennej losowej.

**Zadanie 57.** Z sześciiany o krawędzi  $a$  wylosowano trzy wierzchołki. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe polu trójkąta utworzonego z tych wierzchołków. Oblicz

- rozkład zmiennej losowej,
- wartość oczekiwaną,
- wariancję zmiennej losowej.

**Zadanie 58.** Dla zmiennej losowej z zadań 34 i 35 oblicz wariancję.

**Zadanie 59.** Dla zmiennej z zadania 42 policz wartość oczekiwaną.

**Zadanie 60.** Dla zmiennej z zadania 43 policz wariancję.

**Zadanie 61.** Spośród zbioru par liczb  $\{(k, l) : k, l \in \{0, 1, \dots, 9\}\}$  losowana jest jedna para  $(m, n)$ . Wartością zmiennej losowej  $X$  jest  $m + n$ . Wyznacz  $\mathbb{E}(X)$ .

**Zadanie 62.** Oblicz  $\mathbb{D}^2(X)$  jeżeli  $X$  jest zmienną losową o rozkładzie

- jednostajnym na odcinku  $[a, b]$ ,
- wykładniczym z parametrem  $\lambda$ .

**Zadanie 63.**  $X$  ma rozkład o gęstości  $g(t) = \frac{a}{1+t^2}$ . Wyznacz  $a$ ,  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{D}^2(X)$ .

**Zadanie 64.** Niech  $X$  suma oczek w  $k$  rzutach kostką. Oblicz  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{D}^2(X)$ .

**Zadanie 65.** Niech  $X$  iloczyn oczek w dwóch rzutach kostką. Oblicz  $\mathbb{E}(X)$ .

**Zadanie 66.** Losujemy  $n$ -krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od 1 do  $N$ .  $X$  największa spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Oblicz  $\mathbb{E}(X)$ .

**Zadanie 67.** W urnie jest 8 białych i 2 czarne kule. Losujemy kule bez zwracania.  $X$  ilość wyciągniętych do momentu wyciągnięcia pierwszej kuli białej. Jaka jest najbardziej prawdopodobna wartość  $X$ ?

**Zadanie 68.** Udowodnić  $\mathbb{E}(X) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(|X|) \leq \frac{1}{2}(1 + \mathbb{D}^2(X))$ .

**Zadanie 69.** Policz dystrybuantę, wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej, której gęstość zadana jest wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \\ 0 & \text{dla } x \notin \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \end{cases}.$$

**Zadanie 70.** Dany jest rozkład zmiennej losowej  $P(\{\omega : X(\omega) = k\}) = \frac{c}{3^k}$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$ . Wyznacz stałą  $c$ , wartość oczekiwaną i wariancję.

**Zadanie 71.** Dany jest rozkład

$x_i$	1	2	3	4	5
$p_i$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$

Policz jego wartość oczekiwaną, wariancję, odchylenie standardowe, medianę, modę.

**Zadanie 72.** Dla zmiennej losowej zadanej przez gęstość

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & \text{dla } x \in (0, 3) \\ 0 & \text{dla } x \notin (0, 3) \end{cases}$$

policz medianę.

**Zadanie 73.** Oblicz wartość oczekiwaną i wariancję, gdy rozkład zadany jest wzorem

- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & \text{dla } x \in (0, 3) \\ 0 & \text{dla } x \notin (0, 3) \end{cases}$ ,
- $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin x & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{dla } x \notin (0, \pi) \end{cases}$ ,

$x_k$	1	2	3	4
$p_k$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

**Zadanie 74.**  $X$  ma rozkład  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Znajdź czwarty moment zwykły  $X$ .

**Zadanie 75.** Wyznacz  $P(\{\omega : X(\omega)^2 < \frac{3}{4} + X(\omega)\})$ , gdy

- $X$  posiada rozkład  $\mathcal{N}(m, \sigma)$ , później przyjmując  $m = 1, \sigma = 1$ ,
- $X$  posiada rozkład Laplace'a (przyjmując  $\lambda = 1$ ).

**Zadanie 76.** Oblicz  $k$ -ty moment zmiennej losowej o rozkładzie Poissona.

**Zadanie 77.** Oblicz  $k$ -ty moment zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym.

## 1.6 Nierówności związane z momentami.

**Zadanie 78.** Z klasycznej nierówności Czebyszewa oceń prawdopodobieństwo, że zmienna losowa normalna (tzn.  $\mathcal{N}(0, 1)$ ) odchyli się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż

- cztery średnie odchylenia,
- trzy średnie odchylenia.

**Zadanie 79.** Strzelamy 300 razy do tarczy z prawdopodobieństwem trafienia w jednym strzale wynoszącym  $1/4$ . Z nierówności Czebyszewa oceń  $P(\{|X - 75| < 30\})$ , gdzie  $X$  jest ilością trafień.

**Zadanie 80.**  $X$  ma rozkład jednostajny na odcinku  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

- Oszacuj z nierówności Czebyszewa  $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$ ,
- Oblicz  $P(\{|X| \geq \frac{3}{2}\})$  bezpośrednio.

**Zadanie 81.**  $X$  ma rozkład normalny  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Oszacować z góry  $P(\{|X| \geq 3\})$  przy pomocy:

- nierówności Czebyszewa,
- tablic.

**Zadanie 82.** Zmienne losowe  $X_i$ , dla  $i \in \mathbb{N}$  są niezależne i mają jednakowe rozkłady  $P(\{X_i = k\}) = 0,2, k = 1, 2, 3, 4, 5$ . Znajdź prawdopodobieństwo, że zmienna  $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$  przyjmie wartość większą od 320.

**Zadanie 83.** Rzucamy  $n$  razy symetryczną monetą. Niech zmienna losowa  $X_k$  oznacza wyrzucenie orła za  $k$  razem. Korzystając z nierówności, Czebyszewa oszacować  $n$  aby

$$P\left(\left\{\omega : \left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i(\omega) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}\right\}\right) > \frac{9}{10}.$$

**Zadanie 84** (Zadanie poprzednie inaczej sformułowane.). Rzucamy  $n$  razy monetą. Niech  $X$  ilość orłów. Korzystając z nierówności Czebyszewa znajdź takie  $n$  aby  $P(|\frac{1}{n}X - \frac{1}{2}| < 1/10) > 9/10$ .

## 2 Zadania z list dr U. Ostaszewskiej

### 2.1 Prawdopodobieństwo geometryczne

**Zadanie 85.** Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrana z odcinka  $[-\pi, \pi]$  liczba  $x$  należy do dziedziny funkcji  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ .

**Zadanie 86.** Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że pierwiastki równania

$$x^2 + 2bx + c = 0$$

są rzeczywiste, jeśli liczby  $b$  i  $c$  zostały wybrane losowo z przedziału  $[0, 1]$ ?

**Zadanie 87.** W dany kwadrat o boku  $2a$  wpisujemy koło, a następnie w koło kolejny kwadrat. Wybieramy losowo punkt z większego kwadratu. Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrany punkt należy do kwadratu mniejszego.

**Zadanie 88.** Z odcinka o długości  $1$  wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że ani jedna z otrzymanych w ten sposób części nie będzie krótsza od  $a$ , gdzie  $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$ ?

**Zadanie 89.** Odcinek długości  $l$  dzielimy losowo na trzy części. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że z uzyskanych odcinków można zbudować trójkąt?

**Zadanie 90.** Na odcinku  $AB$  o długości jednostkowej umieszczono losowo dwa punkty  $L$  i  $M$ . Wyznacz prawdopodobieństwo, że z  $L$  jest bliżej do  $M$  niż do  $A$ .

**Zadanie 91.** Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma dwóch na chybił trafił wybranych liczb dodatnich, z których każda jest nie większa od jednośc, jest nie większa od jednośc, a ich iloczyn jest nie większy od  $\frac{2}{9}$ ?

**Zadanie 92.** Monetę o promieniu  $r$  rzucamy na parkiet utworzony z przystających kwadratów o boku  $2a$ . Oblicz prawdopodobieństwo, że moneta przykryje przynajmniej dwa kwadraty, jeśli  $r < a$ .

**Zadanie 93.** Na odcinku o długości jednostkowej wybrano losowo dwa punkty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odległości pomiędzy nimi jest nie mniejsza od  $x$ , gdzie  $0 \leq x \leq 1$ ?

### 2.2 Zmienne losowe

**Zadanie 94.** Rzucamy kostką, zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartość  $0$  jeśli liczba wyrzuconych oczek jest podzielna przez  $3$ ,  $1$  gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez  $3$  daje resztę  $1$ ,  $2$  gdy liczba wyrzuconych oczek przy dzieleniu przez  $3$  daje resztę  $2$ . Wyznacz rozkład zmiennej losowej zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 95.** Przeznaczona do odbioru partia towaru zawiera jednakową liczbę sztuk I, II i III gatunku. Niech  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  oznaczają zdarzenia elementarne w doświadczeniu polegającym na wylosowaniu z tej partii towaru sztuki odpowiednio I, II, III gatunku. Zmienne losowe  $X, Y$  określamy w sposób następujący

$$\begin{aligned} X(\omega_1) &= 2, X(\omega_2) = 1, X(\omega_3) = 0 \\ Y(\omega_1) &= 0, Y(\omega_2) = 1, Y(\omega_3) = 2. \end{aligned}$$

Porównać rozkłady zmiennych losowych  $X, Y$ . Wyznacz ich dystrybuanty. Czy zmienne losowe  $X$  i  $Y$  są równe?

**Zadanie 96.** Z pęku  $n$  kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 97.** Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 98.** Dane są  $4$  urny i  $3$  kule. Rozmieszczamy kule w urnach. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości pustych urn. Oblicz rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 99.** Losujemy  $n$ -krotnie (ze zwracaniem) liczbę spośród liczb od  $1$  do  $N$ . Niech zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe największej spośród liczb uzyskanych w losowaniu. Oblicz jej rozkład.

**Zadanie 100.** Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby  $-1, 1$ . Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 101.** Niech  $\Omega = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $P(\omega) = \frac{1}{4}$  dla  $\omega = 0, 1, 2, 3$ . Definiujemy dwie zmienne losowe  $X(\omega) = \sin \frac{\pi\omega}{2}$  oraz  $Y(\omega) = \cos \frac{\pi\omega}{2}$ . Znajdź rozkłady i dystrybuanty zmiennych losowych  $X$  i  $Y$ . Oblicz  $P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = Y(\omega)\})$ .



**Zadanie 102.** Z talii 52 kart wyciągamy 6 i takiemu losowaniu przypisujemy liczbę pików. Znajdź rozkład określonej w ten sposób zmiennej losowej.

**Zadanie 103.** Dana jest gęstość określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}.$$

Nie licząc całki podaj ile wynosi prawdopodobieństwo w punkcie  $\frac{\pi}{4}$ . Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 104.** Dla jakich wartości  $a$  funkcja  $f(x) = ax^2 \mathbb{I}_{[0,2]}(x)$  jest gęstością?

**Zadanie 105.** Niech  $X$  ma rozkład o gęstości  $f(x) = \frac{a}{x^2+1}$ . Wyznacz wartość parametru  $a$  oraz oblicz  $P(\{|X| > 1\})$ ?

**Zadanie 106.** Niech  $X$  ma rozkład o gęstości  $f(\{x\}) = ce^{-|x|}$ . Wyznacz  $c$  i  $P(\{X > -1\})$ .

**Zadanie 107.** Niech  $X$  ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } x \in [-1, 0) \\ x & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, 1] \end{cases}.$$

Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że  $\{|X - \frac{1}{8}| < \frac{5}{8}\}$ .

**Zadanie 108.** Wiemy, że zmienna losowa  $X$  ma rozkład wykładniczy z parametrem  $\lambda > 0$  i  $P(\{X < 2\}) = \frac{3}{4}$ . Oblicz  $\lambda$ .

**Zadanie 109.** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład jednostajny na zbiorze  $A = [-1, 0] \cup [2, 4]$ . Wyznacz gęstość i  $P(\{|X - \frac{3}{2}| < 2\})$ .

**Zadanie 110.** Czy można dobrać parametr  $a$ , by funkcja

a)  $f(x) = \frac{a}{x^2} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x)$ ,

b)  $g(x) = \frac{a}{x} \mathbb{I}_{(1,\infty)}(x)$ ,

c)  $h(x) = a\sqrt{x} \mathbb{I}_{(0,3)}(x)$

była gęstością?

### 2.3 Rozkłady

**Zadanie 111.** Z kwadratu o boku  $a$  losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej  $X$  jest odległość od najbliższego boku. Wyznacz rozkład zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 112.** Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach 1 i 2. Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów. Podaj rozkład zmiennej losowej.

**Zadanie 113.** Z odcinka  $[0, 1]$  losujemy dwie liczby. Wyznacz rozkład zmiennej losowej zmiennej losowej  $X$  przyjmującej wartości równe

a) minimum z wylosowanych liczb,

b) maksimum z wylosowanych liczb,

c) sumie wylosowanych liczb.

**Zadanie 114.** Z kwadratu  $[0, 1]^2$  losujemy punkt  $(x, y)$ . Zmienna losowa  $X$  przyjmuje wartości równe sumie współrzędnych wylosowanego punktu. Wyznacz rozkład zmiennej losowej zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 115.** Czy można dobrać stałe  $a, b$  tak, aby funkcja  $F(x) = a \arctg(x) + b$  była dystrybuantą pewnego rozkładu? Jeśli tak, to je podaj wraz z uzasadnieniem.

**Zadanie 116.** Wyznacz zbiór wszystkich trójek  $a, b$  i  $c$ , dla których funkcja

$$F(t) = \begin{cases} at^2 & \text{dla } t < 0 \\ bt + c & \text{dla } 0 \leq t < 2 \\ 1 & \text{dla } t \geq 2 \end{cases}$$

jest

- a) dystrybuantą zmiennej losowej,  
 b) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie dyskretnym,  
 c) dystrybuantą zmiennej losowej o rozkładzie ciągłym.

**Zadanie 117.** Wyznacz dystrybuanty dla rozkładów opisanych w zadaniach 94 – 110.

**Zadanie 118.** Funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < -1 \\ \frac{1}{4} & \text{dla } -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{dla } 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} & \text{dla } 2 \leq x < 4 \\ 1 & \text{dla } x \geq 4 \end{cases}.$$

jest dystrybuantą zmiennej losowej  $X$ . Wtedy (odpowiedzieć tak lub nie):

- a)  $P(\{X \leq 2\}) > P(\{X > 2\})$ ,  
 b)  $W_X = \{-1, 1, 2, 3\}$ ,  
 c)  $P(\{X = 3\}) = \frac{7}{8}$ ,  
 d)  $P(\{X^2 - 1 = 0\}) = \frac{1}{2}$ .

**Zadanie 119.** Dystrybuanta zmiennej losowej  $X$  dana jest wzorem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 0.1 + t & \text{dla } 0 \leq t < 0.5 \\ 0.4 + t & \text{dla } 0.5 \leq t < 0.55 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0.55 \end{cases}.$$

Wyznacz  $P(\{X = \frac{1}{2}\})$ ,  $P(\{X \in [0, \frac{1}{2}]\})$ ,  $P(\{X < 0.55\})$ .

**Zadanie 120.** Czy można dobrać parametr  $a$  tak, aby podane funkcje były gęstościami pewnego rozkładu zmiennej losowej? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi pozytywnej policz ich dystrybuanty.

a)  $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [0, 4] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 4] \end{cases}$ ,

b)  $f(x) = \begin{cases} ax & \text{dla } x \in [-1, 4] \\ 0 & \text{dla } x \notin [-1, 4] \end{cases}$ ,

c)  $f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{dla } x \in [0, 3] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, 3] \end{cases}$ ,

d)  $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x \cdot (2 - x) & \text{dla } x \in [0, a] \\ 0 & \text{dla } x \notin [0, a] \end{cases}$

**Zadanie 121.** Funkcje  $f_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  są gęstościami rozkładów jednostajnych na odcinkach  $(i - 1, i)$ . Wtedy są gęstościami także funkcje (odpowiedzieć tak lub nie):

- a)  $f_1 + f_2 + f_3$ ,  
 b)  $f_2 \cdot f_3$ ,  
 c)  $|f_3 - f_1|$ ,  
 d)  $\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2$ ,  
 e)  $\max(f_1, f_2)$ .

**Zadanie 122.** Zmienna losowa ma rozkład  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Oblicz prawdopodobieństwo

- $P(\{X > 0\})$ ,

- $P(\{X > 2\})$ ,
- $P(\{|X| < 1\})$ ,
- $P(\{|X| > 1\})$ ,
- $P(\{0 < X < 3\})$ ,
- $P(\{-1 < X < 3\})$ .

**Zadanie 123.** Zmienna losowa ma rozkład  $\mathcal{N}(1, 2)$ . Oblicz prawdopodobieństwo

- $P(\{|X| > 3\})$ ,
- $P(\{X^2 \leq \frac{3}{4} + X\})$ .

### 3 Zadania z list prof. L.Uby

**Zadanie 124.** Dana jest funkcja prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$

$x_i$	- 5	- 2	0	1	3	8
$p_i$	0,1	0,2	0,1	0,2	$c$	0,1

Wyznacz

- stałą  $c$ ,
- wykres funkcji prawdopodobieństwa i jej histogram,
- dystrybuantę i jej wykres,
- prawdopodobieństwa:

- $d1$ )  $P(\{X = 1\})$ ,
- $d2$ )  $P(\{X = 2\})$ ,
- $d3$ )  $P(\{X < 3\})$ ,
- $d4$ )  $P(\{X < 2\})$ ,
- $d5$ )  $P(\{X \leq 0\})$ ,
- $d6$ )  $P(\{-2 \leq X < 3\})$ .

dwoma sposobami korzystając:

- z danej funkcji prawdopodobieństwa,
- z wyznaczonej dystrybuanty: znalezione prawdopodobieństwa zilustrować na rysunku dystrybuanty.

**Zadanie 125.** Dana jest dystrybuanta zmiennej losowej  $X$

$x$	$(-\infty, -2]$	$(-2, 1]$	$(1, 3]$	$(3, +\infty)$
$F(x)$	0	0,2	0,81	1

Wyznacz jej funkcję prawdopodobieństwa.

**Zadanie 126.** Wyraż za pomocą dystrybuanty następujące prawdopodobieństwa

- $P(\{X \leq b\})$ ,
- $P(\{X \geq b\})$ ,
- $P(\{a < X \leq b\})$ ,
- $P(\{a \leq X \leq b\})$ ,
- $P(\{a < X < b\})$ .

**Zadanie 127.** Zmienna losowa  $X$  ma funkcję prawdopodobieństwa postaci

$x_i$	- 3	- 1	3	5
$p_i$	0.1	0.2	0.5	0.2

Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $U$ , jeżeli

a)  $U = 2X + 3$ ,

b)  $U = X^3$ ,

c)  $U = X^2 - 5$ .

**Zadanie 128.** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{dla } 0 \leq x \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}.$$

Wyznacz jej dystrybuantę oraz oblicz  $P(\{X \geq 2\})$ .

**Zadanie 129.** Dobrać tak stałą  $c$  by funkcja

$$f(x) = \begin{cases} c \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

była gęstością, a następnie

a) wyznaczyć jej dystrybuantę,

b) obliczyć  $P(\{|X| < \frac{\pi}{3}\})$  i zinterpretować za pomocą wykresu gęstości i dystrybuanty.

**Zadanie 130.** Z pewnego przystanku autobusy odjeżdżają co 10 minut. Zakładamy, że rozkład czasu przybycia pasażera na przystanek jest jednostajny, oblicz prawdopodobieństwo, że pasażer będzie czekał co najmniej 4 minuty.

**Zadanie 131.** W pewnej miejscowości temperatura  $T$  (w stopniach Celsjusza) mierzona w dniu 1 marca o godzinie 8 jest zmienną losową o gęstości:  $f(x) = 0.5e^{-|x|}$ . Wyznacz jej dystrybuantę oraz  $P(\{|T| < 2\})$ .

**Zadanie 132.** Dobierz tak stałe  $A$  i  $B$  żeby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} A + B \arccos x & \text{dla } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } x < -1 \\ 1 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$$

była dystrybuantą zmiennej losowej  $X$  typu ciągłego.

**Zadanie 133.** Wyznacz tak stałą  $a$ , by funkcja

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 1 \\ 2(1 - \frac{1}{x}) & \text{dla } 1 < x \leq a \\ 1 & \text{dla } x > a \end{cases}$$

była dystrybuantą zmiennej losowej  $X$  typu ciągłego. Oblicz  $P(\{-1 \leq X \leq 1.5\})$  i zinterpretować je za pomocą wykresu gęstości.

**Zadanie 134.** Dystrybuanta zmiennej losowej  $X$  jest określona wzorem

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt.$$

Wyznacz gęstość i naszkicuj jej wykres.

**Zadanie 135.** Lolek wybiera się na bal sylwestrowy do klubu „Proxima” i namawia swoich 5 koleżanek, by poszły razem z nim. Niech  $X$  oznacza liczbę koleżanek Lolka, które wyraziły chęć spędzenia z nim sylwestra. Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$  jest następujący:  $P(\{X = 0\}) = P(\{X = 1\}) = P(\{X = 2\}) = 0.1$ ,  $P(\{X = 3\}) = 0.3$ ,  $P(\{X = 4\}) = P(\{X = 5\}) = p$ .

a) Oblicz  $p$ .

b) Znajdź dystrybuantę zmiennej losowej  $X$ . Narysować wykres dystrybuanty.

c) Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że sylwestra zechcą spędzić z Lolkiem co najwyżej trzy koleżanki.

**Zadanie 136.** Obsługa działa artyleryjskiego ma 3 pociski. Prawdopodobieństwo trafienia do celu jednym pociskiem (przy jednym wystrzale) w danych warunkach wynosi 0.7. Strzelanie kończy się z chwilą trafienia celu albo wyczerpania pocisków. Wyznacz

a) funkcję prawdopodobieństwa liczby oddanych strzałów,

b) przeciętną liczbę oddanych strzałów.

**Zadanie 137.** Robotnik obsługuje 3 maszyny. Prawdopodobieństwo tego, że w ciągu godziny maszyna nie będzie wymagać interwencji wynosi 0.6 dla pierwszej oraz 0.7 dla drugiej i trzeciej maszyny. Przy założeniu, że maszyny pracują niezależnie od siebie, wyznacz funkcję prawdopodobieństwa liczby  $X$  maszyn, które w ciągu godziny ich pracy nie wymagają interwencji robotnika.

**Zadanie 138.** Energia pochodząca z określonego źródła jest pobierana przez pięciu robotników. Aby oszacować zapotrzebowanie na energię, zakładamy, że

1) w danej chwili prawdopodobieństwo  $p$  zapotrzebowania na energię jest takie samo dla każdego z pięciu robotników,

2) robotnicy pracując niezależnie od siebie,

3) każdy robotnik korzysta z energii przeciętnie 12 minut w ciągu godziny.

Niech  $X$  oznacza liczbę robotników pobierających energię w danej chwili. Znajdź rozkład zmiennej losowej  $X$ . Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba robotników pobierających energię w danej chwili jest nie większa od 2. Znajdź najbardziej prawdopodobną wartość zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 139.** Wiadomo, że 1% skrzynek winogron psuje się w czasie transportu. Z transportu w sposób przypadkowy wybrano 3 skrzynki. Niech  $X$  oznacza liczbę skrzynek z zepsutymi winogronami wśród trzech wybranych. Znajdź rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 140.** Prawdopodobieństwo, że statystyczny student nie jest przygotowany do ćwiczeń jest  $p = \frac{1}{3}$ . Prowadzący ćwiczenia wywołuje 4 osoby. Niech  $X$  oznacza liczbę osób, które nie są przygotowane do ćwiczeń (wśród wybranych 4). Znajdź  $P(\{X = 3\})$ .

**Zadanie 141.** Niech zmienna losowa  $X$  ma rozkład równomierny w przedziale  $(-\frac{\pi}{2}, \pi)$ . Wyznacz gęstość zmiennej losowej  $Y = \sin X$ .

**Zadanie 142.** Rzucamy trzy razy moneta. Niech  $X$  oznacza liczbę otrzymanych orłów.

a) Znajdź rozkład i dystrybuantę zmiennej losowej  $X$  oraz sporządzić ich wykres.

b) Oblicz prawdopodobieństwo otrzymania więcej niż 1 orła.

**Zadanie 143.** Zmienna losowa  $X$  podlega rozkładowi normalnemu  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$ . Wyznacz gęstość zmiennej losowej

a)  $Y = 2X - 3$ ,

b)  $Y = X^2$ .

**Zadanie 144.** Zmienna losowa  $X$  podlega rozkładowi

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}$$

Wyznacz gęstość zmiennej losowej  $Y = X^2$ .

**Zadanie 145.** Zmienna losowa ma funkcję prawdopodobieństwa postaci

$$p_k \equiv P(X = k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \quad \text{dla } k \in \mathbb{N}.$$

Wyznacz funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $U$ , jeśli

a)  $U = \cos(\pi K)$ ,

b)  $U = \cos(\frac{1}{2}\pi K)$ ,

c)  $U = \cos^2(\frac{1}{2}\pi K)$ ,

d)  $U = \sin(\frac{1}{2}\pi K) + \cos(\frac{1}{2}\pi K)$ .

**Zadanie 146.** Dla zmiennej losowa  $X$ , która posiada następującą funkcję prawdopodobieństwa postaci

$x_i$	- 3	- 1	3	5
$p_i$	0.1	0.2	0.5	0.2

wyznacz

a) wartość przeciętną,

b) medianę,

c) kwantyl  $x_{0.3}$ ,

d) wariancję (dwoma sposobami ),

e) odchylenie standardowe,

f) odchylenie przeciętne,

g) współczynnik zmienności,

h) współczynnik,

i) nierównomierności,

j) drugi moment zwykły,

k) trzeci moment zwykły,

l) trzeci moment centralny,

m) współczynnik asymetrii.

**Zadanie 147.** Oblicz wartość przeciętną i wariancję rozkładu równomiernego (jednostajnego ).

**Zadanie 148.** Zmienna losowa  $X$  podlega rozkładowi Bernoulliego. Oblicz wartość przeciętną i wariancję tej zmiennej.

**Zadanie 149.** Zmienna losowa  $X$  podlega rozkładowi Poissona, tzn.  $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ , gdzie  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Oblicz wartość przeciętną i wariancję tej zmiennej.

**Zadanie 150.** Określ wartość najbardziej prawdopodobną oraz wartość przeciętną rozkładu  $P(X = k) = \frac{2}{3^k}$ , gdzie  $k \in \mathbb{N}$ .

**Zadanie 151.** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} (1 - x^2) & \text{dla } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{dla } |x| > 1 \end{cases}$$

Narysuj wykres gęstości. Wyznacz też wartość przeciętną, modę, medianę i trzeci moment centralny zmiennej losowej  $X$ .

**Zadanie 152.** Dobrać parametry  $A, B, C, D$  tak aby funkcja

$$F(x) = \begin{cases} A & \text{dla } x \leq 0 \\ Bx^2 & \text{dla } 0 < x \leq 1 \\ 0.5x^2 - x + C & \text{dla } 1 < x \leq 2 \\ D & \text{dla } x > 2 \end{cases}$$

była dystrybuantą pewnej zmiennej losowej  $X$ . Dla  $A = 0, B = 0.125, C = 0.75, D = 1$  oblicz

a)  $P(\{1 \leq X < 1.5\})$ ,

b)  $P(\{1 < X < 1.5\})$ .

c)  $P(\{0.5 < X < 2\})$ ,

d)  $P(\{0.5 < X \leq 2\})$ ,

e)  $P(\{0.25 < X < 1.25\})$ ,

f)  $P(\{1 < X \leq 2\})$ .

Dla zmiennej losowej  $X$  o dystrybuancie  $F$  z  $A = 0$ ,  $B = 0.125$ ,  $C = 0.75$ ,  $D = 1$ , oblicz kwartyle, medianę, wartość przeciętną oraz wariancję.

**Zadanie 153.** Automat produkuje kulki metalowe o średnicach  $X$  (w cm). Średnica  $X$  jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 5 & \text{dla } 0.4 \leq x \leq 0.6 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}.$$

Wyznacz wartość przeciętną objętości tych kulek.

**Zadanie 154.** Pociągi kolejki elektrycznej odjeżdżają ze stacji co 5 minut. Zakładając, że rozkład czasu przybycia pasażera na stację jest jednostajny, oblicz wartość przeciętną i wariancję czasu oczekiwania na pociąg.

**Zadanie 155.** Czas bezawaryjnej pracy pewnego urządzenia (w godzinach) jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

z parametrem  $\lambda = 2$ . Oblicz współczynnik asymetrii i spłaszczenia dla tego rozkładu.

**Zadanie 156.** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 1 \\ \frac{x-1}{2} & \text{dla } 1 < x \leq 3 \\ 1 & \text{dla } x > 3 \end{cases}.$$

Wyznacz odchylenie standardowe i odchylenie przeciętne od wartości średniej tej zmiennej losowej.

**Zadanie 157.** Zmienna losowa typu ciągłego ma rozkład jednostajny na przedziale  $[-5, 15]$ . Wyznacz i naszkicuj jej gęstość. Oblicz wartość przeciętną i współczynnik skupienia (kurtozę) tej zmiennej.

**Zadanie 158.** Zapalkę o długości 5cm złamano w dowolnym punkcie. Zakładając, że rozkład prawdopodobieństwa długości krótszej części zapalki jest jednostajnym oblicz prawdopodobieństwo że długość krótszej części zapalki nie przekracza 0.5cm.

**Zadanie 159.** Wykazać że rozkład wykładniczy jest rozkładem o asymetrii prawej, którego współczynnik asymetrii  $\gamma = 2$ . Oblicz współczynnik skupienia tego rozkładu.

**Zadanie 160.** Podziałka skali woltomierza jest wycechowana co 0.5V. Wskazania woltomierze zaokrągla się do najbliższego punktu podziału. Znajdź prawdopodobieństwo tego, że przy odczycie zostanie popełniony błąd przekraczający 0.1V.

**Zadanie 161.** Błąd losowy  $X$  pomiaru odległości od drogowskazu jest zmienną losową o gęstości  $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{50}}$ . Oblicz  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{D}^2(X)$ ,  $\mu_4$ .

**Zadanie 162.** Wytrzymałość stalowych lin pochodzących z produkcji masowej jest zmienną losową o rozkładzie  $N(1000\text{kg/cm}^2, 50\text{kg/cm}^2)$ . Oblicz jaki procent lin ma wytrzymałość mniejszą od  $900\text{kg/cm}^2$ .

**Zadanie 163.** Znajdź modę i wartość przeciętną zmiennej losowej  $X$  o rozkładzie Marwella z parametrem  $\lambda = 1$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{\pi}\lambda^{3/2}} x^2 \exp(-\frac{x^2}{\lambda}) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 \end{cases}.$$

**Zadanie 164.** Amplituda  $X$  kołysania bocznego statku jest zmienną losową o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{2}x^2} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}.$$

Oblicz

a) wartość przeciętną, medianę i modę zmiennej losowej  $X$ .

b) z jakim prawdopodobieństwem występują amplitudy większe od mody.

**Zadanie 165.** Gęstość prawdopodobieństwa prędkości  $V$  cząsteczek gazu ma postać

$$f(v) = \begin{cases} \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} v^2 \exp(-h^2 v^2) & \text{dla } v > 0 \\ 0 & \text{dla } v \leq 0 \end{cases},$$

gdzie  $h$  – stała zależna od temperatury i masy cząsteczki gazu.

Oblicz

a) wartość przeciętną długości przebytej drogi przez cząsteczkę w jednostce czasu,

b) modę.

**Zadanie 166.** Zmienna losowa  $X$  ma rozkład beta o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2 & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}.$$

Wyznacz gęstość zmiennej losowej  $Y$ , jeśli:

a)  $Y = 2X^3$ ,

b)  $Y = \arcsin X$ ,

c)  $Y = e^X$ .

**Zadanie 167.** Punkt materialny  $M$  porusza się po prostej ruchem jednostajnym od punktu  $O(0,0)$  do punktu  $A(2,0)$ . Wyznacz rozkład zmiennej losowej prawdopodobieństwa losowego czasu  $T$  trwania ruchu, zakładając, że równe odcinki drogi punkt  $M$  przebywa z takim samym prawdopodobieństwem, oraz oblicz  $\mathbb{E}(T)$ .

**Zadanie 168.** Dany jest sześcian, którego krawędź  $X$  ma losową długość z przedziału  $[1, 2]$  o rozkładzie jednostajnym.

a) Oblicz wartość przeciętną objętości i wartość przeciętną pola powierzchni całkowitej tego sześcianu.

b) Wyznacz rozkład zmiennej losowej prawdopodobieństwa objętości tego sześcianu.

**Zadanie 169.** Trwałość lamp ma rozkład Rayleigha o dystrybuancie

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\frac{1}{300}x^2) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}.$$

a) Wyznacz gęstość zmiennej losowej  $Y = X^2$ .

b) Oblicz  $\mathbb{E}(Y)$ .

**Zadanie 170.** Badając zjawisko trzęsienia ziemi, zaobserwowano, że zachodzi związek:  $Y = ce^X$ , gdzie  $Y$  jest intensywnością drgań ziemi w pewnym miejscu,  $X$  - siłą trzęsienia ziemi,  $c$  - współczynnikiem zależnym od odległości danego miejsca od epicentrum trzęsienia i od doboru jednostek. Zakładając, że  $X$  jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

wyznacz dystrybuantę zmiennej losowej  $Y$ .

**Zadanie 171.** Pewne urządzenie składa się z dwóch elementów pracujących niezależnie od siebie połączonych równolegle. Czas bezawaryjnej pracy (w godz.) każdego z nich jest zmienną losową o tym samym rozkładzie wykładniczym o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0.1e^{-0.1x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}.$$

Oblicz prawdopodobieństwo, że urządzenie będzie działało co najmniej przez 20 godzin.

**Zadanie 172.** Korzystając z zależności  $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{D}^2(X-a)$ ,  $a$  - stała, oblicz wariancję zmiennej losowej  $X$  o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}(x-1)^4 e^{-(x-1)} & \text{dla } x > 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}.$$



**Zadanie 173.** W wyniku przeprowadzonego doświadczenia prawdopodobieństwo znalezienia oczekiwanego wyniku wynosi  $p = 0.6$ . Takie doświadczenie możemy powtarzać dowolną liczbę razy i robimy tak, aż do uzyskania oczekiwanego wyniku. Oznaczając przez  $K$  liczbę powtórzeń tego doświadczenia, przy założeniu niezależności powtórzeń, wyznacz

- a) funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $K$  i histogram rozkładu,
- b) dystrybuantę,
- c) prawdopodobieństwo, że liczba doświadczeń będzie: mniejsza niż 3, nie mniejsza niż 3, liczbą z przedziału  $[2, 5)$ ,
- d) wartość przeciętna, wariancję i odchylenie standardowe,
- e) współczynnik asymetrii.