

Lista czwarta,* †
Metody probabilistyczne i statystyka
kierunek: Informatyka, studia I°

dr Jarosław Kotowicz
wersja z dnia 15 marca 2020

Spis treści

1 Wielowymiarowa zmienna losowa	1
1.1 Wielowymiarowa rozkład normalny.	5
1.2 Niezależność zmiennych losowych.	6
1.3 Funkcje zmiennych losowych po raz drugi.	8
2 Zadania z listy dr U. Ostaszewskiej	9

1 Wielowymiarowa zmienna losowa

Zadanie 1. *Dobierz tak stałą c , aby funkcja*

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & \text{dla } 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów} \end{cases}$$

była gęstością rozkładu dwuwymiarowego. Dla tak obliczonej stałej policz dystrybuantę tego rozkładu oraz rozkłady brzegowe.

Zadanie 2. *Czy można dobrać stałą c tak, aby funkcja*

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy + x + y & \text{dla } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów} \end{cases}$$

była gęstością rozkładu dwuwymiarowego. Jeśli tak, to dla tak obliczonej stałej policz dystrybuantę tego rozkładu oraz rozkłady brzegowe.

Zadanie 3. *Wyznacz dystrybuanty oraz rozkłady brzegowe następującego rozkładu dwuwymiarowego*

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów} \end{cases}.$$

Zadanie 4. *Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład równomierny na kwadracie $\langle 0, 2 \rangle^2$. Oblicz rozkłady brzegowe.*

Zadanie 5. *Dana jest dwuwymiarowa gęstość*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{9}xy & \text{dla } x, y \in \langle 1, 2 \rangle \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Oblicz moment rzędu 2

- $(2, 0)$;
- $(1, 1)$.

*©J.Kotowicz

†Zadania 93 –100, 101 –111, 112 –128 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej z list [1], [2], [3].

Zadanie 6. Dobierz stałą a , tak aby funkcja określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} a & \text{dla } 0 < y < x^2 < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej.

Zadanie 7. Dla zmiennej losowej z zadania 6 oblicz rozkłady brzegowe.

Zadanie 8. Wyznacz stałą c , tak aby funkcja $f(x, y) = c \exp(-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2))$ była gęstością. Oblicz momenty zwykłe rzędu 2, rozkłady brzegowe oraz rozkłady zmiennych $Z_1 = X + Y, Z_2 = X - Y$.

Zadanie 9. Dana jest gęstość prawdopodobieństw układu zmiennych losowych

$$f(x, y) = kxy \exp(-(x^2 + y^2)), x \geq 0, y \geq 0.$$

Wyznacz k rozkłady brzegowe, warunkowe, pierwsze i drugie momenty.

Zadanie 10. Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa układu trzech zmiennych losowych (X, Y, Z) mając daną dystrybuantę

$$F(x, y, z) = \begin{cases} (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by})(1 - e^{-cy}) & \text{dla } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases}.$$

Zadanie 11. Niech $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą. Wyraż dystrybuantę układu (X, Y) za pomocą dystrybuant zmiennych losowych X, Y jeśli $Y = g(X)$.

Zadanie 12. Niech $F(x, y)$ będzie dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) . Wyraż dystrybuantę układu $(\max(X, Y), \min(X, Y))$ za pomocą dystrybuanty F .

Zadanie 13. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład równomierny na zbiorze $K = \{(x, y) : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} \leq 1\}$. Oblicz wszystkie momenty rzędu 2.

Zadanie 14. (X, Y) ma rozkład jednostajny na kwadracie $[0, 1] \times [0, 1]$. Oblicz wszystkie momenty zwykłe i centralne rzędu 2.

Zadanie 15. Czy można dobrać parametr c tak, aby podane funkcja była gęstością pewnego rozkładu zmiennej losowej.

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy + x & \text{dla } x \in \langle 0, 2 \rangle \wedge y \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Zadanie 16. Policz dla gęstości z zadania 15

- rozkłady brzegowe;
- rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$;
- momenty zwykłe i centralne rzędu pierwszego i drugiego.

Zadanie 17. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość prawdopodobieństwa zadaną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} C(x + y) \exp^{-(x+y)} & \text{dla } x > 0 \wedge y > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}.$$

- Oblicz współczynnik C .
- Oblicz rozkłady brzegowe, dystrybuantę i współczynnik kowariancji.

Zadanie 18. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład równomierny na zbiorze $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2, r > 0\}$. Oblicz wszystkie momenty rzędu 2.

Zadanie 19. Doświadczenia niezależne przerywane są, gdy zdarzenie losowe A zostanie zaobserwowane po raz drugi. Niech zmienna losowa X_1 oznacza numer doświadczenia, gdy A pojawi się pierwszy raz, X_2 numer doświadczenia, gdy A pojawi się drugi raz. Wyznacz rozkład układu (X_1, X_2) .

Zadanie 20. Niech u jest funkcją nieparzystą na \mathbb{R} równą 0 poza odcinkiem $(-1, 1)$ oraz

$$|u(r)| < \frac{1}{\sqrt{2\pi} e}.$$

a) Sprawdź, że funkcja

$$f(r_1, r_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2)\right\} + u(r_1)u(r_2),$$

jest gęstością pewnego układu (X_1, X_2) .

b) Czy zmienne (X_1, X_2) są niezależne?

Zadanie 21. Sprawdź, że jeżeli układ (X_1, X_2) posiada rozkład równomierny na $[0, L] \times [0, L]$, to zmienne $|X_1 - X_2|$ oraz $\min\{X_1, X_2\}$ posiadają jednakowe rozkłady.

Zadanie 22. Z kwadratu $[0, 1] \times [0, 1]$ losowany jest punkt (x, y) . Określamy zmienne losowe

$$X_1((x, y)) = \min\{x, y\}, X_2((x, y)) = \max\{x, y\}.$$

Wyznacz rozkład układu (X_1, X_2) , rozkład zmiennej $X_2 - X_1$, $\mathbb{E}(X_1 \cdot X_2)$, $\mathbb{E}(X_2 - X_1)$.

Zadanie 23. Spośród N ponumerowanych elementów losowanych jest n elementów (schemat losowania ze zwracaniem). Zmienne losowe X_1, X_2 są określone następująco:

1. X_1 - wartość najmniejszego wylosowanego numeru,
2. X_2 - wartość największego wylosowanego numeru.

Wyznacz rozkład układu (X_1, X_2) oraz $\mathbb{E}(X_1 X_2)$.

Zadanie 24. Czas bezawaryjnej pracy jednego urzędnika jest zmienną losową o wartościach z odcinka $[0, T]$, a jej rozkład jest ciągły. Kontrolujemy pracę n takich urzędników. Zakładamy, że pracują one niezależnie od siebie i charakteryzują się jednakowymi rozkładami czasu bezawaryjnej pracy. Oznaczmy przez X_1 liczbę tych urzędników, dla których czas bezawaryjnej pracy okaże się krótszy niż $k \cdot T$, a przez X_2 liczbę tych urzędników, dla których ten czas będzie dłuższy niż $k \cdot T$, $0 < k < 1$. Wyznacz rozkład układu (X_1, X_2) .

Zadanie 25. Niech $\beta > 0$ i X ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$. Znajdź gęstość $Y = \ln(X^{-\beta})$.

Zadanie 26. Niech

$$g(x, y) = \begin{cases} (1 + y^2)^{-1} \exp(-\pi x) & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

będzie gęstością dwuwymiarowego rozkładu. Znajdź dystrybuantę tego rozkładu.

Zadanie 27. Niech

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \vee y < 0 \\ y - y \exp(-3x) & \text{dla } x > 0, 0 < y < 1 \\ 1 - \exp(-3x) & \text{dla } x > 0, y > 1 \end{cases}$$

będzie dystrybuantą dwuwymiarowego rozkładu. Wyznacz gęstość tego rozkładu.

Zadanie 28. X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładach jednostajnych na odcinkach $(-1, 1)$ i $(1, 3)$ odpowiednio, $\Psi = (X, Y)$. Znajdź dystrybuantę rozkładu zmiennej losowej Ψ .

Zadanie 29. Niech

$$g(x, y) = \begin{cases} \exp(-\pi x) & \text{dla } x > 0, y \in [0, \pi] \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}$$

będzie gęstością dwuwymiarowego rozkładu. Znajdź dystrybuantę tego rozkładu.

Zadanie 30. Znajdź takie $a > 0$, żeby funkcja określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} (1 + x^2)^{-1} & \text{dla } y \in [0, a] \\ 0 & \text{dla } y \notin [0, a] \end{cases}$$

była gęstością rozkładu prawdopodobieństwa na \mathbb{R}^2 .

Zadanie 31. Niech $f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}$ będzie gęstością prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) . Wyznacz dystrybuantę (X, Y) .

Zadanie 32. Na \mathbb{R}^2 określamy rozkład: $P(-1, 0) = 0,1$, $P(-1, 1) = 0,2$, $P(0, 0) = 0,2$, $P(0, 1) = 0,3$, $P(1, 1) = 0,2$. Czy P jest iloczynem swoich rozkładów brzegowych?

Zadanie 33. Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) mając jej dystrybuantę $F(x, y) = (1 - e^{-3x} - e^{-4y} + e^{-3x-4y})\mathbb{I}_{]0, +\infty[\times]0, +\infty[}$.

Zadanie 34. Znajdź rozkłady brzegowe zmiennych losowych X, Y mając gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{16} & \text{dla } |x| < 2, |y| < 2 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Zadanie 35. Znajdź gęstości prawdopodobieństwa rozkładów brzegowych zmiennych losowych X i Y , mając gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 \exp(-x - 2y) & \text{dla } x, y > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Zadanie 36. Znajdź rozkłady brzegowe zmiennych losowych X, Y mając rozkład zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) opisany tabelką

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	0,05	0,23	0,20	0,12
y_2	0,20	0,08	0,10	0,02

Zadanie 37. Niech m, n będą ustalonymi liczbami naturalnymi, niech dla dowolnych $i, j \geq 1$ zachodzi

$$P(\{X = 2^{\frac{i}{m}}, Y = 2^{\frac{j}{n}}\}) = 2^{-(i+j)}.$$

Zbadaj, które momenty zwykle istnieją.

Zadanie 38. Niech K będzie kwadratem o boku długości 1 położonym na płaszczyźnie. Jakie warunki musi spełniać K aby rozkład prawdopodobieństwa o gęstości danej wzorem

$$g(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } (x, y) \notin K \\ 1 & \text{gdy } (x, y) \in K \end{cases}$$

był produktem swoich rozkładów brzegowych?

Zadanie 39. Niech $f(x, y, z) = g(x, y, z) + h(x, y, z)$, gdzie

$$g(x, y, z) = \begin{cases} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2} - 2\pi z) & \text{dla } z > 0 \\ 0 & \text{dla } z < 0 \end{cases} \quad h(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy(z-1)}{1000} & \text{dla } -1 < x, y < 1, 0 < z < 2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y, z \end{cases}.$$

Sprawdź, że f jest gęstością rozkładu pewnej trójwymiarowej zmiennej losowej (X, Y, Z) . Znajdź wszystkie możliwe gęstości brzegowe. Zbadaj, czy zmienne losowe $X, Y; X, Z; Y, Z; X, Y, Z$ są niezależne?

Zadanie 40. Sprawdź że następująca funkcja określona na płaszczyźnie jest gęstością rozkładu prawdopodobieństwa: $g(x, y) = \frac{1}{4}2^{-k}$ gdy $(x, y) \in (n, n+1] \times (m, m+1]$, $n, m \in \mathbb{Z}$ i $k = \max\{|n|+|m|, |n+1|+|m|, |n|+|m+1|, |n+1|+|m+1|\}$

Zadanie 41. Znajdź dystrybuantę rozkładu prawdopodobieństwa z zadania 40. Sprawdź czy jest on produktem swoich rozkładów brzegowych.

Zadanie 42. Znajdź prawdopodobieństwo przy rozkładzie z zadania 40 następujących podzbiorów płaszczyzny

- $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$,
- $\{(x, y) : x < 0 \wedge y > 0\}$
- $\{(x, y) : xy > 0\}$
- $\{(x, y) : x > y\}$

Zadanie 43. Sprawdź czy następujące funkcje są dystrybuantami rozkładu prawdopodobieństwa na płaszczyźnie

(1)

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \vee y < 0 \\ 1 - e^{-x} - \ln^{-1}(e+y) + e^{-x} \ln^{-1}(e+y) & \text{dla } x, y > 0 \end{cases}$$

(2)

$$G(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x, y < 0 \\ \exp(x + y) & \text{dla } x \leq -y \wedge y > 0 \\ \frac{x}{-y} & \text{dla } x \leq -y \wedge y < 0 \wedge x > 0 \\ 1 & \text{dla } x > -y \end{cases}$$

Zadanie 44. Znajdź prawdopodobieństwo przy rozkładzie o dystrybuancie danej wzorem (2) z zadania 43 następujących podzbiorów płaszczyzny:

- $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$
- $\{(x, y) : x < 0 \wedge y > 0\}$
- $\{(x, y) : xy > 0\}$
- $\{(x, y) : x > y\}$

Zadanie 45. Rzucamy dwukrotnie kostką. Wartość pierwszej współrzędnej jest równa wartości bezwzględnej różnicy oczek w obu rzutach, a wartość drugiej współrzędnej jest równa iloczynowi oczek, które wypadły w obu rzutach. Znajdź rozkład tak określonej dwuwymiarowej zmiennej losowej.

Zadanie 46. Rzucamy dwukrotnie kostką. Jeśli za pierwszym razem wypadnie nieparzysta ilość oczek, to od wyniku drugiego rzutu odejmujemy 1; jeśli za pierwszym razem wypadnie parzysta ilość oczek, to podwajamy wynik drugiego rzutu. Znajdź rozkład, ilustrację graficzną rozkładu, dystrybuantę, wartość oczekiwaną i wariancję tak określonej zmiennej losowej.

Zadanie 47. Rzucamy dwukrotnie kostką. Wartość pierwszej współrzędnej jest równa wartości bezwzględnej różnicy oczek w obu rzutach, a wartość drugiej współrzędnej jest równa iloczynowi oczek, które wypadły w obu rzutach. Znajdź rozkład tak określonej dwuwymiarowej zmiennej losowej.

1.1 Wielowymiarowa rozkład normalny.

Uwaga 1. Gęstość prawdopodobieństw układu n zmiennych losowych normalnych (wielowymiarowy układ normalny) ma postać dana jest wzorem

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\Delta}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \overline{k_{ij}} (x_i - \mathbb{E}(X_i))(x_j - \mathbb{E}(X_j)) \right],$$

gdzie Δ - macierz korelacyjna, $\overline{k_{ij}}$ element macierzy odwrotnej do Δ .

Zadanie 48. Dana jest macierz kowariancji układu losowych normalnych (X, Y)

$$\begin{bmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{bmatrix}.$$

Podaj wzór na dwuwymiarową gęstość prawdopodobieństwa jeśli $\mathbb{E}(X) = 26, \mathbb{E}(Y) = -12$.

Zadanie 49. Dana jest macierz kowariancji układu czterowymiarowej zmiennej losowej (X_1, X_2, X_3, X_4) o rozkładzie normalnym

$$\begin{bmatrix} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 16 & 6 & -2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podaj wzór na czterowymiarową gęstość prawdopodobieństwa jeśli $\mathbb{E}(X_1) = 10, \mathbb{E}(X_2) = 0, \mathbb{E}(X_3) = -10, \mathbb{E}(X_4) = 1$.

Zadanie 50. Dana jest macierz kowariancji układu zmiennych losowych normalnych (X, Y, Z)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Podaj wzór na gęstość prawdopodobieństwa jeśli $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) = 0$.

Zadanie 51. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{8}(2x^2 + 4y^2 - 2y(z + 5) + (z + 5)^2) \right].$$

Zbuduj macierz kowariancji.

Zadanie 52. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x, y) = c \exp \left[-(4(x - 5)^2 + 2(x - 5)(y - 3) + 5(y - 3)^2) \right].$$

Wyznacz c , a następnie zbudować macierz kowariancji.

Zadanie 53. Wiedząc, że układ zmiennych losowych o rozkładzie normalnym ma brzegowe wartości oczekiwane równe zero oraz macierzy kowariancji równą

$$\bullet M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet M = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

wyznacz jego gęstość.

Zadanie 54. Trójwymiarowa zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład o gęstości

$$\bullet f(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{6\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{12} [6x^2 + (4(y - 1)^2 + (z + 2)^2 - 2(y - 1)(z + 2))] \right\},$$

$$\bullet f(x, y, z) = c \exp \left\{ -\frac{1}{2} [2x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz + 4xz] \right\},$$

Wyznacz macierz kowariancji (w przykładzie drugim wyznacz wcześniej stałą c).

1.2 Niezależność zmiennych losowych.

Zadanie 55. Udowodnij, że dla przypadków, gdy

$$(i) W_{X_i} = \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \quad P(\{X_i = 0\}) = p, \quad 0 < p < 1,$$

$$(ii) W_{X_i} = \{-1, 1\}, \quad i = 1, 2, \quad P(\{X_i = 1\}) = p, \quad 0 < p < 1.$$

warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności zmiennych losowych X_1, X_2 jest by $\mathbb{E}(X_1 X_2) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$.

Zadanie 56. Niech $X, Y (Y \neq 0)$ niezależne zmienne losowe. Udowodnij, że zmienne losowe X oraz Y^{-1} są również niezależne.

Zadanie 57. X, Y niezależne zmienne losowe, $P(\{X > 0\}) = 1$. Udowodnij, że zdarzenia $\{Y > 2\}$ i $\{-1 < X < 1\}$ są niezależne.

Zadanie 58. X, Y niezależne zmienne losowe, $P(\{Y > 0\}) = 1$. Udowodnij, że zmienne losowe X, Y^2 są niezależne.

Zadanie 59. (X, Y) ma rozkład jednostajny na trójkącie $\{(x, y) : x, y > 0, x + y < 1\}$. Czy zmienne losowe X, Y są niezależne?

Zadanie 60. Niech (X, Y) zmienna losowa o gęstości

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{dla } x^2 + y^2 < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Czy X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi?

Zadanie 61. Zbadaj, czy zmienne losowe X, Y są niezależne, jeśli dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \right).$$

Zadanie 62. Zbadaj, czy zmienne losowe X, Y są niezależne, jeśli dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi} \text{ dla } x^2 + y^2 < 4.$$

Zadanie 63. X zmienna losowa o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$ oraz $Y_1 = \sin 2\pi X, Y_2 = \cos 2\pi X$. Oblicz współczynnik korelacji $\rho(Y_1, Y_2)$. Czy Y_1, Y_2 są niezależne?

Zadanie 64. Niech ω wynik rzutu kostką, $X(\omega) = [\frac{\omega}{\sqrt{6}}], Y(\omega) = [\frac{\omega}{\pi}]$ ($[a]$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej a). Czy X, Y są niezależne?

Zadanie 65. Niech A, B zdarzenia niezależne i $X = \mathbb{I}_A, Y = \mathbb{I}_B$ (\mathbb{I}_C oznacza funkcję charakterystyczną zbioru C). Czy X, Y są zmiennymi losowymi niezależnymi?

Zadanie 66. X, Y niezależne zmienne losowe. Oblicz $\mathbb{E}((X + Y)^2)$ wiedząc, że

- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3}, \mathbb{E}(Y) = \frac{2}{3}, \mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{2}, \mathbb{D}^2(Y) = \frac{1}{2}$.
- $\mathbb{E}(X) = \pi, \mathbb{E}(Y) = -\pi, \mathbb{D}^2(X) = 1, \mathbb{D}^2(Y) = 1$.

Zadanie 67. X, Y niezależne zmienne losowe. Oblicz $\mathbb{E}((X - Y)^2)$ wiedząc, że

- $\mathbb{E}(X) = 2, \mathbb{E}(Y) = 2, \mathbb{D}^2(X) = \frac{3}{2}, \mathbb{D}^2(Y) = \frac{1}{2}$.
- $\mathbb{E}(X) = 2, \mathbb{E}(Y) = 1, \mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{2}, \mathbb{D}^2(Y) = \frac{1}{2}$.

Zadanie 68. Udowodnij, że jeśli X, Y niezależne zmienne losowe, to zachodzi $\mathbb{D}^2(XY) = \mathbb{D}^2(X)\mathbb{D}^2(Y) + (\mathbb{E}(Y))^2\mathbb{D}^2(X) + (\mathbb{E}(X))^2\mathbb{D}^2(Y)$.

Zadanie 69. Niech (ω_1, ω_2) będzie wynikiem dwukrotnego rzutu kostką. Czy zmienne losowe

$$X = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } \omega_1 - \omega_2 \text{ jest parzyste} \\ 0 & \text{jeśli } \omega_1 - \omega_2 \text{ jest nieparzyste} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1 & \text{jeśli 3 dzieli } \omega_1 - \omega_2 \\ 0 & \text{jeśli 3 nie dzieli } \omega_1 - \omega_2 \end{cases}$$

są niezależne?

Zadanie 70. Niech zmienne losowe X, Y będą niezależne. Wtedy

$$\mathbb{D}^2(XY) \geq \mathbb{D}^2(X)\mathbb{D}^2(Y).$$

Zadanie 71. (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \exp(-\frac{x^2+y^2}{2}) + ag(x, y)$, gdzie

$$g(x, y) = \begin{cases} xy & \text{dla } |x|, |y| < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}.$$

Czy X, Y są niezależne? Oblicz współczynnik korelacji i momenty zwykłe do rzędu 2 włącznie.

Zadanie 72. Wrzucamy do trzech komórek trzy kule (kule i komórki ponumerowane). N - ilość zajętych komórek, X_i - ilość kul w i -tej komórce. Znajdź łączny rozkład (X_1, N) . Znajdź rozkłady brzegowe. Czy zmienne losowe X_1 i N są niezależne?

Zadanie 73. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość prawdopodobieństwa zadaną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dla } |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}.$$

- Oblicz współczynnik korelacji, rozkłady brzegowe i dystrybuantę.
- Czy zmienne losowej X, Y są niezależne.

Zadanie 74. X, Y są dwiema niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Oblicz $\mathbb{E}(Z)$ jeżeli $Z = X + Y$.

1.3 Funkcje zmiennych losowych po raz drugi.

Zadanie 75. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady wykładnicze.

- Policz rozkład zmiennej $Z = X + Y$.
- Policz momenty rzędu pierwszego i drugiego.

Zadanie 76. Oblicz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X + Y$, gdzie X, Y są niezależnymi i mają gęstości równe odpowiednio

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp^{-\frac{x^2}{4}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \exp^{-\frac{y^2}{64}}.$$

Zadanie 77. Oblicz gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X - Y$, gdzie X, Y są niezależnymi i mają gęstości równe odpowiednio

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \exp^{-\frac{x^2}{6}}, \quad f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{y^2}{8}}.$$

Zadanie 78. Znajdź wzór na gęstość zmiennej losowej $Z = XY$, jeżeli dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y)$.

Zadanie 79. Zmienna losowa X posiada rozkład równomierny na $[0, 1]$. Wyznacz

- rozkład $\eta = \max\{X, 1 - X\}$,
- rozkład $\xi = \min\{X, 1 - X\}$,
- $\mathbb{E}(\eta), \mathbb{E}(\frac{\eta}{1-\eta}), \mathbb{E}(\frac{1-\eta}{\eta})$,
- $\mathbb{E}(\xi), \mathbb{E}(\frac{\xi}{1-\xi}), \mathbb{E}(\frac{1-\xi}{\xi})$.

Zadanie 80. Niech X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$ każda. Czy $Z = X + Y$ ma rozkład jednostajny na jakimś zbiorze?

Zadanie 81. Niech X, Y niezależne zmienne losowe. Wyprowadź wzór na gęstość $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ w zależności od gęstości X i gęstości Y .

Zadanie 82. Niech X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$. Znajdź gęstość $Z = X^2 + Y^2$.

Zadanie 83. Znajdź złożenie rozkładu Poissona zależącego od parametru λ , z rozkładem wykładniczym, któremu ten parametr podlega.

Zadanie 84. Niech niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkłady wykładnicze z parametrami $a, b > 0$ odpowiednio. Znajdź rozkład $Z = X + Y$.

Zadanie 85. Niech niezależne zmienne losowe X, Y mają rozkłady normalne z odchyleniami standardowymi 2, 4 odpowiednio (wartość średnia obydwu rozkładów równa 0). Znajdź rozkład

- $Z = X + Y$,
- $Z = X - Y$.

Zadanie 86. Niech X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładach $P(\{X = 1\}) = P(\{X = 4\}) = \frac{1}{2}$, $P(\{Y = 0\}) = P(\{Y = 1\}) = P(\{Y = 2\}) = \frac{1}{3}$. Znajdź rozkład zmiennej losowej $Z = X + Y$.

Zadanie 87. X_1, X_2 niezależne zmienne losowe o rozkładzie Poissona z $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Znajdź rozkład $Y = X_1 + X_2$.

Zadanie 88. X_1, X_2 niezależne zmienne losowe o rozkładzie wykładniczym z $\lambda > 0$. Znajdź gęstość rozkładu $Y = X_1 - X_2$.

Zadanie 89. Niech X, Y niezależne zmienne losowe, $F_X(x) = \frac{x^2}{2}$ dla $0 < x \leq \sqrt{2}$ i $F_Y(y) = y$ dla $0 < y < 1$. Oblicz F_{X+Y} .

Zadanie 90. Niech X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie ciągłym. Wyraż gęstość zmiennej losowej $Z = \min(X, Y)$ przy pomocy gęstości X i Y .

Zadanie 91. X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, \lambda]$, gdzie Λ podlega rozkładowi jednostajnemu na $[0, 1]$. Znajdź złożenie rozkładów X i Λ .

Zadanie 92. X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie jednostajnym na $[0, 1]$. Znajdź gęstość

- $Z = X + Y$;
- $Z = X - Y$;
- $Z = \max(X, Y)$;
- $Z = \min(X, Y)$.

2 Zadania z listy dr U. Ostaszewskiej

Zadanie 93. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład prawdopodobieństwa określony następująco:

$$P(X = 1, Y = 1) = a, P(X = 1, Y = 2) = 0,3, P(X = 3, Y = 1) = 0,4, P(X = 3, Y = 2) = 0,1.$$

Wyznacz stałą a . Zapisz ten rozkład w tabeli. Oblicz wartość dystrybuanty w punktach: $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.

Zadanie 94. Funkcja $F(x, y)$ jest określona następująco

a)

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \text{ i } y < 0 \\ 1 & \text{w.p.p} \end{cases},$$

b)

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \text{ lub } y < 0 \\ 1 & \text{w.p.p} \end{cases},$$

c)

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x + y \geq 0 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}.$$

Zbadaj czy tak określona funkcja może być traktowana jako dystrybuanta pewnej zmiennej losowej (X, Y) .

Zadanie 95. Dystrybuanta dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) dana jest wzorem

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 2 \text{ lub } y < 2 \\ (1 - \frac{1}{x})(1 - \frac{1}{y}) & \text{w.p.p} \end{cases}.$$

Wyznacz dystrybuanty brzegowe i oblicz prawdopodobieństwa $P(X > 2)$, $P(1 < X \leq 3, 1 < Y \leq 3)$.

Zadanie 96. Na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, 2^\Omega, P)$, gdzie $\Omega = \{0, 1, \dots, 9\}$, $P(\omega) = 0,1$ dla dowolnego $\omega \in \Omega$, określone są zmienne losowe $X(\omega)$ - reszta z dzielenia ω przez 2, $Y(\omega)$ - reszta z dzielenia ω przez 3. Znajdź rozkład wektora losowego (X, Y) . Ile wynosi $P(X = Y)$?

Zadanie 97. Rzucamy trzy razy monetą. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów, natomiast zmienna losowa Y przyjmuje wartość 0, jeśli w pierwszym rzucie wypadł orzeł lub wartość 1, jeśli w pierwszym rzucie wypadła reszka. Wyznacz rozkład zmiennej losowej (X, Y) .

Zadanie 98. Zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) ma rozkład jednostajny wewnątrz prostokąta ograniczonego odcięciami $x = a$, $x = b$ i rzędnymi $y = c$, $y = d$ ($b > a$, $d > c$). Znajdź gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuantę tej zmiennej losowej.

Zadanie 99. Funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-y} & \text{dla } 0 \leq x < \infty, x \leq y < \infty \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

określa gęstość zmiennej losowej (X, Y) . Oblicz dystrybuantę tej zmiennej.

Zadanie 100. Wyznacz dystrybuantę $F(x, y)$ dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) , jeśli dana jest jej gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq x < 1, x \leq y \leq 2 - x \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}.$$

Zadanie 101. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f(x, y) = \begin{cases} cx(x - y) & \text{dla } 0 < x < 2, -x < y < x \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}$$

a) oblicz stałą c ,

b) oblicz $P((X, Y) \in A)$, gdzie $A = \{(x, y) : 0 < x < 2, 0 < y < x\}$,

c) znajdź rozkłady brzegowe.

Zadanie 102. Dana jest funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} 18(x^2 - y^2)e^{-x} & \text{dla } |y| \leq x \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}.$$

Zbadaj czy tak określona funkcja jest gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) .

Zadanie 103. Niech

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 + y^2) & \text{dla } (x, y) \in K \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases},$$

gdzie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x - 1 \leq y \leq 1 - x\}$

a) Wyznacz stałą c tak, aby funkcja $f(x, y)$ była gęstością pewnej zmiennej losowej (X, Y) ,

b) oblicz $P(X^2 + Y^2 \leq 0,5)$.

Zadanie 104. Niech (X, Y, Z) będzie trzywymiarową zmienną losową o gęstości $f(x, y, z) = cg(x, y, z)$. Wyznacz stałą c , jeżeli

a) $g(x, y, z) = 1$ dla $0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 3, 4 \leq z \leq 5$ i $g(x, y, z) = 0$ w pozostałej części \mathbb{R}^3 ,

b) $g(x, y, z) = 1$ dla $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ i $g(x, y, z) = 0$ w pozostałej części \mathbb{R}^3 ,

c) $g(x, y, z) = x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}$ dla $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ i $g(x, y, z) = 0$ w pozostałej części \mathbb{R}^3 , gdzie $l \geq 1, m \geq 1, n \geq 1$.

Zadanie 105. Zmienna losowa (X, Y) ma gęstość

$$f(x, y) = \frac{a}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)},$$

a) wyznacz parametr a ,

b) znajdź dystrybuantę $F(x, y)$,

c) znajdź rozkłady brzegowe.

Zadanie 106. Wyznacz gęstość prawdopodobieństwa trzywymiarowej zmiennej losowej (X, Y, Z) mając daną dystrybuantę

$$F(x, y, z) = (1 - e^{-ax})(1 - e^{-by})(1 - e^{-cz})$$

dla $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Zadanie 107. Oblicz prawdopodobieństwo trafienia punktu o współrzędnych (X, Y) w obszar określony nierównościami $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$, jeżeli współrzędne punktu (X, Y) mają następującą dystrybuantę

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-y^2} + a^{-x^2 - 2y^2} & \text{dla } x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}.$$

Zadanie 108. Współrzędne punktu losowego (X, Y) mają rozkład jednostajny wewnątrz prostokąta ograniczonego odciętymi 0 i a oraz rzędnymi 0 i b . Oblicz prawdopodobieństwo trafienia punktu losowego w koło o promieniu R , jeżeli $a > b$, a środek koła pokrywa się z początkiem układu współrzędnych.

Zadanie 109. Gęstość prawdopodobieństwa układu zmiennych losowych (X, Y) dana jest wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} c(R - \sqrt{x^2 + y^2}) & \text{dla } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}.$$

Wyznacz stałą c oraz prawdopodobieństwo trafienia w koło o promieniu $a < R$ ze środkiem w początku układu współrzędnych.

Zadanie 110. Zmienna losowa dwuwymiarowa (X, Y) ma rozkład dany gęstością

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{3x^2y^2} & \text{dla } x \geq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq x^2 \\ 0 & \text{w.p.p} \end{cases}.$$

Znajdź dystrybuantę tej zmiennej losowej.

Zadanie 111. Niech $\lambda > 0$ oraz niech

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \alpha e^{-\lambda(x+y+z)} & \text{dla } x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}.$$

Dla jakiej wartości parametru α funkcja $f(x, y, z)$ jest gęstością wektora losowego? Wyznacz dystrybuantę tej zmiennej losowej.

Zadanie 112. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład prawdopodobieństwa określony następująco:

$$P(X = 1, Y = 1) = 0, 2, P(X = 1, Y = 2) = 0, 3, P(X = 3, Y = 1) = 0, 4, P(X = 3, Y = 2) = 0, 1.$$

- Zapisz ten rozkład w tabeli,
- zbadaj czy zmienne losowe X i Y są niezależne,
- wyznacz dystrybuantę i wartość przeciętną zmiennej losowej X ,
- oblicz wartość dystrybuanty dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) w punkcie $(2, 2)$.

Zadanie 113. W 10-cio elementowej partii pewnego towaru są 2 sztuki wadliwe. Wylosowano bez zwrotu 2 sztuki. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości równe liczbie sztuk wadliwych wśród 2 wylosowanych sztuk, zaś Y przyjmuje wartość 1, jeśli pierwsza wylosowana sztuka jest wadliwa, oraz 0, jeśli nie jest wadliwa.

- Wyznacz rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) ,
- zbadaj czy zmienne losowe X i Y są niezależne,
- oblicz współczynnik korelacji zmiennych X i Y .

Zadanie 114. Rzucamy kolejno 5 razy monetą. Oznaczmy przez X liczbę wyrzuconych orłów, przez Y liczbę serii orłów, a przez Z długość najdłuższej serii.

- Wyznacz rozkłady dwuwymiarowych zmiennych losowych (X, Y) , (X, Z) oraz (Y, Z) ,
- wyznacz rozkłady brzegowe poszczególnych zmiennych losowych,
- oblicz $P(X = 3, Z \leq 2)$,
- wyznacz rozkład trzywymiarowej zmiennej losowej (X, Y, Z) .

Zadanie 115. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny odpowiednio na przedziałach $(0, a)$ i $(0, \frac{1}{2}\pi)$. Znajdź $P(X < b \cos Y)$, gdzie $0 < b < a$.

Zadanie 116. Jakie jest prawdopodobieństwo, że równanie $x^2 - 2Bx + C = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, jeśli B i C są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\text{Exp}(\lambda)$?

Zadanie 117. Momenty przybycia autobusów A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi X, Y o rozkładzie wykładniczym z parametrami α i μ

- znajdź rozkład momentu przybycia pierwszego autobusu,
- oblicz prawdopodobieństwo, że autobus A przyjedzie pierwszy.

Zadanie 118. Dana jest funkcja

$$f(x, y) = ce^{-\frac{1}{2}(x^2+2xy+5y^2)}$$

- wyznacz stałą c tak, aby dana funkcja była gęstością zmiennej losowej (X, Y) ,
- wyznacz rozkłady brzegowe,
- czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zadanie 119. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa układu zmiennych losowych (X, Y)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(x + y) & \text{dla } 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

- wyznacz dystrybuantę układu,

- wyznaczyć rozkłady brzegowe,
- zbadać czy zmienne losowe są niezależne.

Zadanie 120. Niech dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład jednostajny na K , gdzie $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq a\}$. Czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zadanie 121. Trójwymiarowa zmienna losowa (X, Y, Z) ma rozkład równomierny w obszarze $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 1\}$. Wyznacz gęstość rozkładu brzegowego zmiennej losowej Z oraz oblicz wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(Z)$, czy zmienne losowe X, Y oraz Z są niezależne?

Zadanie 122. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład określony gęstością

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{xy^3} & \text{dla } a < x < y < \infty \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

- sprawdź dla jakiego a podana funkcja jest gęstością,
- znajdź dystrybuantę,
- znajdź gęstości rozkładów brzegowych,
- sprawdź czy zmienne X i Y są niezależne,
- policz wartości przeciętne rozkładów brzegowych.

Zadanie 123. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} A & \text{dla } (x, y) \in V \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases},$$

gdzie V jest obszarem ograniczonym półokręgiem o promieniu 1, położonym nad osią Ox . Oblicz $\mathbb{E}(XY)$.

Zadanie 124. Dwie niezależne zmienne losowe X i Y mają rozkłady normalne $\mathcal{N}(m, \sigma)$ z takimi samymi parametrami. Znajdź współczynnik korelacji zmiennych losowych $U = aX + bY$ i $V = aX - bY$.

Zadanie 125. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{11}(2x^2 + xy) & \text{dla } (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1) \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}.$$

Oblicz współczynnik korelacji.

Zadanie 126. Niech S będzie trójkątem ograniczonym prostymi $y = -x$, $y = x$ oraz $y = 1$. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma gęstość daną wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } (x, y) \in S \\ 0 & \text{w.p.p.} \end{cases}$$

- oblicz kowariancję $\text{cov}(X, Y)$,
- oblicz współczynnik korelacji zmiennych losowych X, Y ,
- czy zmienne losowe X i Y są niezależne?

Zadanie 127. Niech X_1, X_2, \dots, X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi i mają rozkład

- jednostajny na przedziale $[\alpha, \beta]$,
- równomierny dwupunktowy $W_{X_i} = \{1, 2\}$.

Niech $U = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$, natomiast $V = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Wyznacz rozkład dwuwymiarowej zmiennej losowej (U, V) .

Zadanie 128. Niech $F(x, y)$ będzie dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) , a $G(x, y)$ będzie dystrybuantą dwuwymiarowej zmiennej losowej (U, V) , gdzie $U = \max(X, Y)$ oraz $V = \min(X, Y)$. Wyrazić $G(x, y)$ przez $F(x, y)$.

Bibliografia

- [1] Ostaszewska Urszula. *Lista 1, probabilistyka*. 2013. URL: http://math.uwb.edu.pl/~uostasze/prob_13_1.pdf (term. wiz. 15.03.2020).
- [2] Ostaszewska Urszula. *Lista 2, probabilistyka*. 2013. URL: http://math.uwb.edu.pl/~uostasze/prob_13_2.pdf (term. wiz. 15.03.2020).
- [3] Ostaszewska Urszula. *Lista 3, probabilistyka*. 2013. URL: http://math.uwb.edu.pl/~uostasze/prob_13_3.pdf (term. wiz. 15.03.2020).