Lista piąta,[*] [†]
Metody probabilistyczne i statystyka
kierunek: Informatyka, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

wersja z dnia 15 kwietnia 2020

Spis treści

1 Funkcje charakterystyczne

Zadanie 1. *Policz funkcje charakterystyczne*

- *rozkładu jednostajnego na odcinku* $]-1,1[$ *(*$\mathcal{U}(]-1,1[)$*),*
- *rozkład trójkątny równoramienny na odcinku* $[-1,1]$*,*
- *rozkładu jednostajnego na* $[a,b]$ *(*$\mathcal{U}([a,b])$*),*
- *rozkładu wykładniczego (Exp*(λ)*),*
- *rozkładu Bernoulliego (Binom*(n,p)*),*
- *rozkładu Poissona,*
- *rozkładu zero-jedynkowego (*$p \in]0,1[$*,* $P(\{X=1\}) = p$*,* $P(\{X=0\}) = 1-p$*),*
- *rozkładu* $\mathcal{N}(0,1)$*,*
- *rozkładu* $\mathcal{N}(m,\sigma)$*,*
- *rozkładu zadanego wzorem* $P(\{X=k\}) = (1-p)p^k$ *dla* $k = 0,1,2,\dots (0<p<1)$*,*
- *zmiennej losowej* X*, którego gęstość zadana jest wzorem* $f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$*,*
- *zmiennej losowej, która przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych oczek kostką do gry.*

Zadanie 2. *Niech* $\varphi_X(t) = (1+t^2)^{-1}$*. Znajdź gęstość rozkładu* X*.*

Zadanie 3. *Oblicz momenty zmiennej losowej* X *z zadania poprzedniego.*

Zadanie 4. *Sprawdź, że funkcja charakterystyczna* φ *rozkładu zmiennej losowej posiada własności:*

a) $|\varphi(t)| \leqslant \varphi(0) = 1$*,*

[†]Zadania 67 –74 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej z list [1].

b) dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n$ oraz dowolnych $t_1, \ldots, t_n$, $n \geqslant 1$, spełniona jest nierówność

$$\sum_{k,l=1}^{n} \varphi(t_k - t_l) z_k \overline{z}_l \geqslant 0,$$

c) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$

Zadanie 5. *Czy funkcja*

- $\varphi(t) = \exp(-|t|i)$,
- $\varphi(t) = \frac{1}{1+i|t|}$.

może być funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu?

Zadanie 6. *Wiedząc, że funkcja φ jest funkcją charakterystyczną udowodnij, że funkcja sprzężona i moduł funkcji podniesiony do kwadraty są również funkcjami charakterystycznymi.*

Zadanie 7. *Niech φ będzie funkcją charakterystyczną rozkładu zmiennej losowej X. Udowodnij, że $|\varphi|$ jest również funkcją charakterystyczną pewnego rozkładu.*

Zadanie 8. *Mając daną funkcję charakterystyczną znajdź rozkład zmiennej losowej*

- $\varphi(t) = \frac{1}{4}(\exp(-it) + \exp(it))^2$,
- $\varphi(t) = \cos(t)$,
- $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt),\ a_k > 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$,
- $\varphi_X(t) = (1 + t^2)^{-1}$.

Zadanie 9. *Oblicz momenty zmiennej losowej X z ostatniego przykładu zadania 8.*

Zadanie 10. *Korzystają z funkcji charakterystycznej policz*

- *wartość oczekiwaną dla rozkładu Poissona,*
- *k-ty moment zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym z parametrem λ,*
- *k-ty moment zmiennej losowej o rozkładzie Poissona;*

Zadanie 11. *Danych jest n niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach równomiernych na odcinku $[-1, 1]$. Oblicz funkcję charakterystyczną zmiennej losowej będącej sumą danych zmiennych.*

Zadanie 12. *Wyznacz funkcję charakterystyczną sumy niezależnych zmiennych losowych.*

Zadanie 13. *Przedstaw funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $Y = aX + b$ w zależności od funkcji charakterystycznej zmiennej losowej X.*

Zadanie 14. *Niech φ będzie funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X. Czy funkcja φ^{2015} jest funkcją charakterystyczną? Odpowiedź uzasadnij. W przypadku odpowiedzi twierdzącej wskaż zmienną losową, której może to być funkcja charakterystyczna.*

Zadanie 15. *Wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu wykładniczego z parametrem λ. Na jej podstawie, korzystając z własności funkcji charakterystycznej, wyznacz wariancję zmiennej losowej o rozkładzie wykładniczym.*

Zadanie 16. *Niech $X_1, \ldots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrami odpowiednio $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Korzystając z własności funkcji charakterystycznych pokaż, że zmienna losowa $Y = X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład Poissona.*

Zadanie 17. *Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych standaryzowanych. Wyznacz rozkład zmiennej losowej $Z = X - Y$.*

Zadanie 18. *Niech zmienna X ma rozkład normalny standaryzowany. Wyznacz funkcję charakterystyczną zmiennej X^2.*

Zadanie 19. *Korzystając z poprzedniego zdania wyznacz funkcję charakterystyczną rozkładu $\chi^2(n)$.*

Zadanie 20. *Udowodnij, że jeżeli φ_1 i φ_2 są funkcjami charakterystycznymi, to $\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$ jest też funkcja charakterystyczną.*

Zadanie 21. *Uogólnij zadanie 20 na kombinację liniową, ściśle wypukłą skończonej ilości funkcji charakterystycznych.*

Zadanie 22. *Niech X_1, X_2 będą zmiennymi niezależnymi o rozkładzie Cauchy'ego z parametrem a, tzn. o gęstości $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+x^2}$. Wiedząc, że funkcja charakterystyczna rozkładu Cauchy'ego z parametrem a jest postaci $\varphi(t) = \exp(-a|t|)$, pokaż, że $X_1 + X_2$ też ma rozkład Cauchy'ego. Wyznacz ten parametr.*

Zadanie 23. *Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i maja rozkład Cauchy'ego z parametrem $a = 1$. Wykaż, że $X = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ ma również rozkład Cauchy'ego.*

Zadanie 24. *Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym X ma rozkład jednostajny na odcinku $\left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$, natomiast Y ma rozkład zadany równościami:*

$$P\left(\left\{Y = 1 + \frac{1}{n}\right\}\right) = P\left(\left\{Y = -1 + \frac{1}{n}\right\}\right) = \frac{1}{2},$$

gdzie n jest ustaloną liczba naturalną. Zmienna Z określona jest wzorem $Z = 2X + Y$. Wyznacz funkcję charakterystyczną zmiennej Z.

Zadanie 25. *Wiedząc, że $\varphi(t) = \frac{1}{2-\exp(it)}$ jest funkcją charakterystyczna rozkładu dyskretnego, którego zbiorem wartości jest zbiór liczb całkowitych nieujemnych, wyznacz ten rozkład.*

2 Prawa wielkich liczb.

Zadanie 26. *Zmienna losowa X_k przyjmuje wartości równe k rzutowi kostki do gry, gdzie $k \in \mathbb{N}$. Wyznacz granicę ciągu $Y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.*

Zadanie 27. *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładach równomiernych na odcinku $(1, 2)$. Wyznacz granicę $Y_n = \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} X_n}$.*

Zadanie 28. *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że*

- $$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{c}}\exp\left[-\frac{(x-c^n)^2}{\sqrt{n}}\right], \; c \in (0,1), \; n \in \mathbb{N},$$
- $P(\{X_n = n\}) = \frac{1}{1+n^2}$ *i* $P(\{X_n = -\frac{1}{n}\}) = \frac{n^2}{1+n^2}$,
- $P(\{X_n = \sqrt{n}\}) = P(\{X_n = -\sqrt{n}\}) = \frac{1}{n}$ *i* $P(\{X_n = 0\}) = 1 - \frac{2}{n}$.

Czy ciąg spełnia MPWL?

Zadanie 29. *Niech będzie dany ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $\mathbb{E}(X_1) = 0$ i $\mathbb{D}^2(X_1) = 1$. Określmy ciąg*

- $Y_n = a + \alpha^n X_n$,
- $Y_n = a + n^\alpha X_n$.

Dla jakich wartości parametru α spełnia on

- *SPWL?*
- *MPWL?*

Zadanie 30. *Niech będzie dany ciąg niezależnych zmiennych losowych*

- $(X_n)_{n\geqslant 3}$ *i* $P(\{X_n = \pm\sqrt{\ln n}\}) = \frac{1}{2}$,
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $P(\{X_n = \pm 1\}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, $P(\{X_n = \pm 2^n\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$.
- $(X_n)_{n\geqslant 3}$ *i* $P(\{X_n = \pm \ln n\}) = \frac{1}{2}$,

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $P(\{X_n = \pm 1\}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$, $P(\{X_n = 2^{\pm n}\}) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Czy ciąg ten spełnia

- *SPWL?*
- *MPWL?*

Zadanie 31. *Niech dany będzie ciąg $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie*

$$P(\{X_n = \pm n^\beta\}) = \frac{1}{2n^\alpha},\ P(\{X_n = 0\}) = 1 - \frac{1}{n^\alpha},$$

gdzie $\alpha, \beta > 0$. Przy jakiej zależności miedzy parametrami α, β spełnia on

- *SPWL?*
- *MPWL?*

Zadanie 32. *Dany jest ciąg niezależnych dodatnich zmiennych losowych o jednakowych rozkładach takich, że $\mathbb{E}(\ln X_n) = 0$ oraz moment rzędu 2 istnieje. Dla $r > 0$ do czego jest zbieżne prawdopodobieństwo $P(\{\prod_{k=1}^{n} X_k < r^{\alpha\sqrt{n}}\})$ przy n zbiegającym do nieskończoności.*

Zadanie 33. *Niech będzie dany ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 2}$ taki, że $X_n \in \mathcal{N}(0, \ln n)$. Czy spełnia on SPWL?*

Zadanie 34. *Niech ciąg $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niezależnych zmienny losowych będzie zbieżny według dystrybuanty do zmiennej losowej X gdzie $P(\{X = const\}) = 1$. Dowieść, że ciąg jest zbieżny według prawdopodobieństwa do X.*

Zadanie 35. *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $P(\{X_n = -n-4\}) = \frac{1}{n+4}, P(\{X_n = n+4\} = \frac{3}{n+4}$ i $P(\{X_n = -1\}) = 1 - \frac{4}{n+4}$. Wykaż, że*

- *$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny według prawdopodobieństwa,*
- *$\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_n) \neq \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n)$.*

Zadanie 36. *Niech $\lambda > 0$. Zmienne $X_{n\lambda}$ są niezależne i posiadają rozkład Poissona. Udowodnij, że $\frac{X_{n\lambda} - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}$ zbiega według dystrybuanty do rozkładu normalnego standaryzowanego.*

Zadanie 37. *Niech $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie*

$$P(\{X_k = i\}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1},\ i, k \in \mathbb{N}.$$

Wykaż, że dla ciągu zmiennych losowych (Y_n), gdzie $Y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ zachodzi MPWL.

Zadanie 38. *Niech $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie*

- $$P(\{X_k = \frac{(-1)^i}{i}\}) = \frac{1}{2^i}, i, k \in \mathbb{N},$$
- $$P(\{X_k = i\}) = \frac{e^{-1}}{i!}, k \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Wykaż, że dla zmiennych losowych zachodzi MPWL.

Zadanie 39. *Rozstrzygnąć, dla ciągu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niezależnych zmiennych losowych o niżej podanych rozkładach jakie są spełnione warunki dostateczne stosowalności SPWL (MPWL)*

- $P(\{X_n = \pm 2^n\}) = \frac{1}{2}$,
- $P(\{X_n = \pm 2^n\}) = 2^{-(2n+1)}, P(\{X_n = 0\}) = 1 - 2^{-2n}$,
- $P(\{X_n = \pm n\}) = \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{2}}, P(\{X_n = 0\}) = 1 - n^{-\frac{1}{2}}$.

Zadanie 40. *Niech będzie dany ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że $P(\{X_n = 2^n\}) = P(\{X_n = -2^n\}) = 2^{-(2n+1)}, P(\{X_n = 0\}) = 1 - 2^{-2n}$. Czy spełnia on MPWL? Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbiega z według prawdopodobieństwa do X podać wzór na zmienną losowej X i pokazać powyższą zbieżność.*

3 Twierdzenia graniczne.

Zadanie 41. *Partia towaru ma wadliwość 7% . Pobrano próbkę 800 elementową. Oblicz prawdopodobieństwo, że ilość sztuk wadliwych w tej próbie jest zawarta w granicach 6%-9%.*

Zadanie 42. *Strzelamy 300 razy, przy czym prawdopodobieństwo za każdym razem trafienia do celu wynosi 0,25. Określić prawdopodobieństwo, że liczba celnych strzałów będzie się różnic o nie więcej niż 0,1 od*

- *ogólnej liczby strzałów.*
- *najbardziej prawdopodobnej liczby celnych strzałów.*

Zadanie 43. *Przeprowadzono* 60 *jednakowych prób, w których mogło zajść zdarzenie A. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenie w pojedynczej próbie wynosi* 0,6*. Oblicz prawdopodobieństwo, że zdarzenie nie pojawi się w większości prób.*

Zadanie 44. *W 10 000 rzutów monetą orzeł wypadł 5400 razy. Uzasadnij przypuszczenie, że moneta jest niesymetryczna.*

Zadanie 45. *Korzystając z prawa wielkich liczb Moivre'a - Laplace'a oszacuj prawdopodobieństwo, że w 720 rzutach kostką ilość szóstek będzie*

- *zawierać się pomiędzy 121 a 140,*
- *mniejsza niż 125,*
- *większa niż 110.*

Zadanie 46. *Rzucamy 1000 razy kostką. Niech zmienna losowa S oznacza sumę wyrzuconych oczek. Na podstawie twierdzenia Lindeberga*

- *ocenić* $P(\{3450 \leqslant S \leqslant 3550\})$,
- *znajdź takie* N, M *jak najmniej różniące się od siebie, aby* $P(\{M \leqslant S \leqslant N\}) > 99/100$.

Zadanie 47. *Dodano do siebie 10000 liczb, każda dana z dokładnością* 10^{-m}*. Błędy zaokrągleń są niezależne i mają rozkład jednostajny na odcinku* $[-\frac{1}{(2\cdot 10^{-m})}, \frac{1}{(2\cdot 10^{-m})}]$*. Znajdź granice w których będzie się zawierał łączny błąd z prawdopodobieństwem większym niż* $\frac{997}{1000}$.

Zadanie 48. *Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia w jednym doświadczeniu wynosi 0,3. Z jakim prawdopodobieństwem można twierdzić, że częstość tego zdarzenia przy 100 doświadczeniach będzie zawarta w granicach od 0,2 do 0,4?*

Zadanie 49. *Mamy 100 obrabiarek pracujących niezależnie od siebie, o tej samej mocy i tym samym sposobie pracy. Każda z nich jest włączana w ciągu 0,8 całego czasu pracy. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w dowolnie wybranej chwili będzie włączanych od 70 do 86 obrabiarek?*

Zadanie 50. *Prawdopodobieństwo, że w ciągu czasu* T *przestanie działać jeden kondensator jest równe 0,2. Wyznacz prawdopodobieństwo, że spośród 100 kondensatorów w ciągu czasu* T *przestanie działać*

- *nie mniej niż 20 kondensatorów,*
- *mniej niż 20 kondensatorów,*
- *od 14 do 26 kondensatorów.*

Zadanie 51. *Wykaż, że ciąg* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zmiennych losowych niezależnych o takim samym rozkładzie i skończonej wariancji spełnia centralne twierdzenie graniczne (CTG).*

Zadanie 52. *Dane są ciągi* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *i* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *zmiennych losowych niezależnych, przy czym* $P(\{X_n = \frac{1}{n^\alpha}\}) = P(\{X_n = -\frac{1}{n^\alpha}\}) = p$, $P(\{X_n = 0\}) = 1 - 2p$, $0 < p < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ *oraz* $P(\{Y_n = \sqrt{n}\}) = P(\{X_n = -\sqrt{n}\}) = \frac{1}{2}$. *Dowieść, że każdy z tych ciągów spełnia CTG.*

Zadanie 53. *Pewna konstrukcja składa się ze 100 jednakowych elementów. Na podstawie CTG Lindeberga-Lévy'ego oszacować prawdopodobieństwo, że całkowita masa tej konstrukcji nie przekroczy 335 kg, jeśli rozkład masy elementów, z których jest złożona, ma wartość oczekiwana 3,3 kg, a odchylenie standardowe 0,1 kg?*

Zadanie 54. *Czas oczekiwania na tramwaj linii 4 jest zmienna losowa o rozkładzie wykładniczym o średniej 15 minut. Pan A codziennie w dni robocze dojeżdża nim do pracy. Oszacować na podstawie CTG Lindeberga-Lévy'ego prawdopodobieństwo, ze pan A traci kwartalnie (czyli w ciągu 65 kolejnych dni roboczych) na czekanie na tramwaj linii 4 nie więcej niż 1000 minut.*

Zadanie 55. *W pewnym towarzystwie ubezpieczeniowym jest ubezpieczonych 10000 samochodów. Każdy z właścicieli płaci roczna składkę 30 PLN za samochód. Średnio 6 na 1000 samochodów ulega uszkodzeniu w ciągu roku. Właścicielowi uszkodzonego pojazdu towarzystwo wypłaca 2500 zł. Na podstawie twierdzenia Moivre'a–Laplace'a oszacować, jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu roku*

1. *towarzystwo nie poniesie strat,*
2. *zysk przekroczy 125000 zł?*

4 Zadania z list prof. L.Uby.

Zadanie 56. *Wyznacz funkcję charakterystyczna dla zmiennej o rozkładzie:*

a) Poissona $P(\{X=k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$*, gdzie* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*,*

b) Bernoulliego (dwumianowego) $P(\{X=k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$*, gdzie* $k = 0,1,\ldots,n$ *i* $p \in]0,1[$*,*

c) normalnym standaryzowanym $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$ *(uwaga:* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{c^2}\right) dx = ac\sqrt{\pi}$*).*

Zadanie 57. *Szacuje się, że 40% podatników otrzyma zwrot pieniędzy z tytułu nadpłaconych podatków. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze wśród 800 losowo wybranych podatników zwrot pieniędzy z tego tytuły należy się więcej niż 300,ale nie więcej niż 400 osobom?*

Zadanie 58. *Przeprowadzone badania pokazały, że co dziesiąty student dojeżdża na zajęcia własnym pojazdem. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród 200 losowy wybranych studentów co najmniej 16, ale nie więcej niż 30, dojeżdża na zajęcia własnym pojazdem?*

Zadanie 59. *W hotelu jest 100 pokoi. Ponieważ z doświadczenia wynika, ze jedynie 90% dokonanych wcześniej rezerwacji jest później wykorzystywanych, właściciel hotelu polecił przyjmować rezerwacje na więcej niż 100 pokoi. Oblicz prawdopodobieństwo, że przy przyjęciu 104 rezerwacji w hotelu zabraknie wolnych pokoi.*

Zadanie 60. *Pan Sławek musi sprawdzić programy napisane przez studentów na zaliczenie przedmiotu. Student uzyska zaliczenie, jeżeli w jego programie prowadzący znajdzie nie więcej niż pewna graniczna liczbę błędów. Oceniane programy maja około 200 linii kodu, a prawdopodobieństwo tego, ze linia kodu zawiera błąd wynosi według pana Sławka 0.2. Ile powinna wynosić owa graniczna liczba błędów, jeżeli pan Sławek zamierza zaliczyć przedmiot 75% studentów?*

Zadanie 61. *Z doświadczenia minionych lat wynika, ze egzamin z rachunku prawdopodobieństwa zalicza około 60% studentów. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze spośród 180 osób, które w tym roku przystąpiły do egzaminu, co najmniej połowa go zda?*

Zadanie 62. *Na ulicy stoi sprzedawca gazet. Każdy mijający go przechodzeń kupuje u niego gazetę z jednakowym prawdopodobieństwem. Średni czas sprzedaży 100 gazet równy jest 4 godziny i z prawdopodobieństwem równym 0.95 zawiera się w przedziale od 3 do 5 godzin. Oszacuj na podstawie twierdzenia Lindberga-Leviego ile maksymalnie gazet może zamówić sprzedawca, aby z prawdopodobieństwem 0.99 nie pozostała mu żadna po 6 godzinach?*

Zadanie 63. *Ediemu udaje się zebrać złom, średnio za 20zł dziennie, z odchyleniem standardowym 10zł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że przez pół roku uda mu się zebrać kwotę przekraczająca 3500zł? Przyjąć, dla uproszczenia, ze miesiąc ma 30 dni.*

Zadanie 64. *Błąd zaokrąglenia przy dodawaniu na kalkulatorze ma rozkład jednostajny* $U(-10^{-8}, 10^{-8})$*. Oszacuj prawdopodobieństwo, ze przy dodawaniu 1000 liczb błąd bezwzględny nie przekroczy* 10^{-7}*.*

Zadanie 65. *Prawdopodobieństwo wysłania z drukarni książki z nie zadrukowana chociaż jedna strona wynosi 0,01. Jakie jest prawdopodobieństwo, ze w 5000 nakładzie odsetek wybrakowanych książek będzie poniżej 2%?*

Zadanie 66. *W 1994 roku apteki prywatne stanowiły 80% ogółu aptek miejskich. Oblicz prawdopodobieństwo, ze w losowo wybranej próbie 200 aptek miejskich liczba aptek prywatnych będzie mniejsza niż 170.*

5 Zadania z listy dr U. Ostaszewskiej

Zadanie 67. *Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracje po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wybory restauracji dokonują losowo - powiedzmy, rzucając symetryczną monetą. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?*

Zadanie 68. *Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia w jednym doświadczeniu wynosi 0,3. Z jakim prawdopodobieństwem można twierdzić, że częstość tego zdarzenia przy 100doświadczeniach będzie zawarta w granicach od 0,2 do 0,4?*

Zadanie 69. *Rzucono 1000 razy kostką. Znajdź prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie zawarta między 3410 a 3590?*

Zadanie 70. *Na poczcie pojawia się 100 klientów dziennie, każdy z nich dokonuje wpłaty (bądź wypłaty)* X_i, $i = 1, 2, \ldots, 100$, *gdzie* X_i *są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, zerowej średniej i wariancji równej* 100^2. *Ile gotówki należy mieć w kasie rano, by z prawdopodobieństwem 0,99 na koniec dnia nie zabrakło pieniędzy? Zakładamy, że w ciągu dnia ewentualne braki uzupełnia naczelnik, ale wieczorem chce odzyskać swoje pieniądze.*

Zadanie 71. *W Polsce jest 24,6 mln podatników i każdy z nich myli się przy wypełnianiu zeznania podatkowego. Wartość błędu dla i-tego podatnika jest zmienna losową* X_i, *gdzie* $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *i* $\mathbb{D}^2(X_i) = 10000$, *czyli* $\mathbb{D}(X_i) = 100$ *(złotych); ponadto zakładamy niezależność* X_i. *Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 1 grosz na podatnika? A 3 grosze?*

Zadanie 72. *Funkcja*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \textit{dla } x \in (-1, 0) \\ \frac{2}{3} & \textit{dla } x \in [0,1) \\ 0 & \textit{dla } x \notin (-1, 1) \end{cases}$$

jest gęstością każdej z niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$. *Niech* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. *Znajdź przybliżoną wartość prawdopodobieństwa* $P(S_n < 13)$ *dla* $n = 60$.

Zadanie 73. *Zmienne losowe* $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ *są niezależne o jednakowych rozkładzie Poissona z parametrem* $\lambda = 2$. *Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia* $P(\{190 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 220\})$.

Zadanie 74. *Losowy błąd pomiaru pewnej wielkości ma rozkład o wartości przeciętnej* $m = 0$ *i odchyleniu standardowym 0,08. Oblicz prawdopodobieństwo, że błąd średniej arytmetycznej 100 pomiarów nie przekroczy (co do wartości bezwzględnej) 0,1.*

Bibliografia

[1] Ostaszewska Urszula. *Lista 8, probabilistyka*. 2013. URL: http://math.uwb.edu.pl/~uostasze/prob_13_8.pdf (term. wiz. 15. 04. 2020).