Lista pierwsza* †
Rachunek prawdopodobieństwa
kierunek: Informatyka i ekonometria, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

1 Elementy kombinatoryki

Zadanie 1. *Do windy w 8 piętrowym wieżowcu wsiadły 3 osoby. Na ile różnych sposobów mogły one wysiąść, jeśli każda z nich wysiada na*

- *dowolnym piętrze;*
- *innym piętrze;*
- *wszyscy wysiądą na tym samym piętrze.*

Zadanie 2. *Do windy w 9 piętrowym wieżowcu wsiadły 2 osoby. Na ile sposobów mogły one wysiąść ?*

Zadanie 3. *Do windy w 10 piętrowym wieżowcu wsiadły 2 osoby. Na ile różnych sposobów mogły one wysiąść różnych piętrach.*

Zadanie 4. *Winda z 5 pasażerami zatrzymuje się na 10 piętrach. Na ile sposobów pasażerowie mogą wysiąść z windy? Na ile sposobów mogą to zrobić, jeżeli każdy ma wysiąść na innym piętrze?*

Zadanie 5. *Do windy w 55 piętrowym drapaczu chmur wsiadło 11 osób. Ile jest możliwych sposobów, aby co najmniej dwie osoby wysiadły na tym samym pietrze.*

Zadanie 6. *Dany jest sześcian. Ze wszystkich wierzchołków sześcianu losujemy 3 tworząc trójkąt. Ile jest możliwości takich losowań ?*

Zadanie 7. *Ile jest kombinacji z powtórzeniami zbioru 10 elementowego, gdy losujemy dwa elementy.*

Zadanie 8. *W turnieju w którym uczestniczy 20 graczy, każdy z nich gra po jednej partii z innym. Ile partii rozegrano.*

Zadanie 9. *Dzieci łączą się w pary. Ilu dzieci wzięło udział w zabawie, jeżeli wiadomo iż mogły się one połączyć na 110 sposobów.*

Zadanie 10. *Na turnieju rozegrano 190 meczy każdy z każdym. Ilu zawodników uczestniczyło w turniej?*

Zadanie 11. *Ilu zawodników wzięło udział w turnieju szachowym, jeżeli każdy grał z każdym dokładnie 1 partię i w całym turnieju rozegrano ich 10.*

Zadanie 12. *W turnieju szachowym bierze udział n zawodników. $n-2$ rozegrało każdy z każdym po jednej partii, "$n-1$-szy" rozegrał 10 partii a "n-ty" 1 partię. łącznie rozegrano 55 partii. Ilu jest zawodników? Czy "$n-1$-szy" i "n-ty" grali już ze sobą?*

Zadanie 13. *Ile można wykonać chorągwi mającej trzy pasy kolorów z 4 barw.*

† Zadania 75–91 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej ze strony znajdującej się pod adresem http://math.uwb.edu.pl/%7Euostasze/rachiie16.html.

Zadanie 14. *Dane jest 7 gatunków cukierków czekoladowych, z których wybieramy 4 rodzaje. Ile różnych paczek w ten sposób można otrzymać.*

Zadanie 15. *Rzucamy 5 kostkami do gry. Ile jest możliwych wszystkich wyników?*

Zadanie 16. *Rok liczy 365 dni. Ile jest możliwych wszystkich wyników, tak aby 5 osób urodziło się każda innego dnia?*

Zadanie 17. *W urnie znajduje się 5 ponumerowanych kul. Losujemy 5 kul po jednej bez zwracania. Ile można otrzymać różnych wyników?*

Zadanie 18. *W klasie liczącej 37 uczniów rozlosowano trzy jednoosobowe bilety do trzech różnych teatrów. Ile jest możliwych wyników tego losowania?*

Zadanie 19. *Grupę składającą się z 25 osób podzielono na dwie podgrupy po 13 i 12 osób. Ile jest możliwych podziałów?*

Zadanie 20. *Grupę 6 osobową podzielona na dwie równoliczne. Ile było możliwych podziałów?*

Zadanie 21. *Ile jest możliwości trafienia prawidłowo przez gracza w multilotka 10 właściwych liczb.*

Zadanie 22. *Grupa taneczna składa się z 12 chłopców i 12 dziewcząt. Ile różnych par można utworzyć z nich wszystkich, aby mogli oni zatańczyć poloneza.*

Zadanie 23. *W ogłoszonym plebiscycie na 10 najlepszych sportowców zgłoszono 17 kandydatów. Plebiscyt wygrał R. Szurkowski. Obliczyć ile istnieje sposobów przyznania dalszych miejsc, jeżeli sportowcy nie mogą zajmować tego samego miejsca.*

Zadanie 24. *W biegu na 100 m startuje 6 zawodników. Ile jest możliwych wyników ukończenia biegu, jeśli punktowane są pierwsze trzy miejsca i nie uwzględniamy wyników ex eqou.*

Zadanie 25. *Rozmieszczamy 8 kul w 3 szufladach. Ile jest możliwych różnych rozmieszczeń? Które model z poprzedniego zadania można stosować rozwiązując to zadanie. Odpowiedź uzasadnij.*

Zadanie 26. *Iloma sposobami można włożyć m jednakowych kul do k komórek?*

Zadanie 27. *Iloma sposobami można posadzić w rzędzie m drzew liściastych i n iglastych $(m > n)$ tak, aby żadne dwa drzewa iglaste nie sąsiadowały ze sobą?*

Zadanie 28. *Z klasy liczącej 20 osób wybieramy delegację składającą się z 3 osób. Na ile różnych sposobów można ją wybrać.*

Zadanie 29. *Z 12 dziewcząt i 8 chłopców należy wybrać delegację liczącą 2 dziewczynki i 1 chłopca. Na ile różnych sposobów można ją wybrać.*

Zadanie 30. *W pudełku znajduje się 20 śrub wśród których są 3 wadliwe. Wylosowano 5 śrub. Obliczyć ilość możliwości, że otrzymano dokładnie 1 wadliwą.*

Zadanie 31. *Na płaszczyźnie danych jest 12 punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Ile jest różnych prostych przechodzących przez dokładnie dwa punkty.*

Zadanie 32. *Na płaszczyźnie danych jest n punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Ile jest różnych prostych przechodzących przez dokładnie dwa punkty.*

Zadanie 33. *Dany jest sześcian. Ze wszystkich wierzchołków sześcianu losujemy 3 tworząc trójkąt. Ile jest możliwości takich losowań ?*

Zadanie 34. *Ile można skonstruować trójkątów z odcinków o długościach równych: 5,7,9,11,13?*

Zadanie 35. *Na ile sposobów można rozdzielić grupę $k + m + n$ różnych przedmiotów na grupy po k, po m i po n przedmiotów odpowiednio?*

Zadanie 36. *Jak długie powinny być znaki w alfabecie Morsa, aby zapisać 24 literowy alfabet.*

Zadanie 37. *Jak długie powinny być znaki w alfabecie Morsa, aby zapisać wszystkie litery alfabetu polskiego.*

Zadanie 38. *Ile jest różnych tablic rejestracyjnych samochodów składających się z 3 liter i 4 cyfr (24 litery), jeśli*

- *ustawienie tablica jest jak w Polsce;*
- *możemy mieszać kolejność liter i cyfr.*

Zadanie 39. *Ile słów z sensem lub bez można utworzyć z liter tworzących to słowo*

- *mama?*
- *abrakadabra?*
- *bajkopisarka?*
- *panna?*

Zadanie 40. *Na półce ustawiamy dwie nierozróżnialne encyklopedie 13 tomowe. Na ile sposobów można je ustawić?*

Zadanie 41. *Na ile sposobów można ustawić encyklopedię 13 tomową na półce tak, aby tomy*

- *1 i 2*
- *1, 2 i 3*
- *trzy wybrane losowo*

stały obok siebie?

Zadanie 42. *Ile różnych liczb dwucyfrowych można utworzyć ze pięcioelementowego zbioru cyfr.*

Zadanie 43. *Ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć ze zbioru cyfr od 1 do 9.*

Zadanie 44. *Ile różnych liczb trzycyfrowych można utworzyć ze zbioru wszystkich cyfr.*

Zadanie 45. *Ile liczb czterocyfrowych można utworzyć z cyfr 2, 2, 4, 4, 6, 6 ?*

Zadanie 46. *Ile jest różnych liczb czterocyfrowych nieparzystych, jeśli cyfry*

- *nie mogą się powtarzać;*
- *mogą się powtarzać*

Zadanie 47. *Ile różnych liczb czterocyfrowych można utworzyć z cyfr 1,2,...,7, jeśli cyfry nie mogą się powtarzać?*

Zadanie 48. *Ile jest różnych liczb czterocyfrowych, jeśli jedynie cyfry 1 i 2 mogą się tylko powtarzać ?*

Zadanie 49. *Ile różnych liczb pięciocyfrowych można utworzyć z cyfr 0,1,2,3,4, jeśli*

- *żadna z cyfr się nie powtarza?*
- *cyfry mogą się powtarzać?*

Zadanie 50. *Ile różnych liczb sześciocyfrowych można utworzyć ze wszystkich cyfr?*

Zadanie 51. *Ile różnych liczb sześciocyfrowych parzystych można utworzyć ze wszystkich cyfr, jeśli cyfry mogą się powtarzać?*

Zadanie 52. *Ile różnych liczb ośmiocyfrowych można utworzyć z cyfr tworzących liczbę 12212122?*

Zadanie 53. *Na ile sposobów można rozdać 13 kart z talii liczącej 52 karty ?*

Zadanie 54. *Z tali liczącej 52 karty wylosowano 13 kart. Ile było możliwy wyników takich losowań, jeśli otrzymano*

- *dokładnie 1 asa;*
- *asa kier;*
- *dokładnie 3 asy w tym asa pik;*
- *dokładnie 1 asa, 3 króle i 2 damy;*
- *dokładnie wszystkie karty jednego koloru.*
- *5 asów.*

Zadanie 55. *Ile jest możliwości, że brydżysta otrzyma dokładnie*

- *damę pik, asa tref, 5 kierów ?*
- *damę pik, asa tref i 5 trefli ?*
- *wszystkich kart tego samego koloru ?*
- *dokładnie 12 kart tego samego koloru ?*

Zadanie 56. *Z tali liczącej 52 karty wybieramy 9 kart. Ile było takich losowań, że otrzymano dokładnie 1 asa.*

Zadanie 57. *Na egzamin wykładowca przygotował 60 pytań, z których student losuje dokładnie 3. Ile jest wszystkich możliwych wyników takiego losowania.*

Zadanie 58. *4 studentów zdaje egzamin. Na ile sposobów mogą oni otrzymać oceny jeśli wiadomo, że żaden ze studentów nie otrzymał oceny niedostatecznej.*

Zadanie 59. *Na ile sposobów można ustawić 8 wież tak, aby nie mogły się zbić ?*

Zadanie 60. *Ile różnych sznurów korali można ułożyć z 6 karali czarnych i 4 białych, jeśli ustaliliśmy początek sznura.*

Zadanie 61. *Na ile sposobów można rozmieścić w 3 szufladach 5 koszul.*

2 Prawdopodobieństwo kombinatoryki

Zadanie 62. *Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród n przypadkowo dobranych osób żadne dwie nie obchodzą urodzin tego samego dnia* ($n \leqslant 365$).

Zadanie 63. *Rok liczy 365 dni. Obliczyć prawdopodobieństwo, że 3 losowo wybrane panie*

- *urodziły się tego samego dnia;*
- *pierwsza w styczniu, druga w marcu, a trzecia w drugim półroczu.*

Zadanie 64. *Obliczyć prawdopodobieństwo, że spośród 29 osób ich miesiące urodzeń będą rozmieszczone następująco: 7 miesięcy zwiera dokładnie po dwie daty, a 5 miesięcy dokładnie po 3.*

Zadanie 65. *Grupę liczącą 13 osób podzielono na dwie po 6 i 7 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo, że osoby A i B będą w tej samej grupie.*

Zadanie 66. *Samorząd klasowy składa się z 6 uczniów i 4 uczennic. Spośród członków samorządu wybieramy losowo delegację składającą się z 5 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo, że delegacja będzie składała się z dokładnie z 3 uczennic i 3 uczniów.*

Zadanie 67. *Grupę liczącą 14 osób podzielono na dwie po 7 osób. Obliczyć prawdopodobieństwo, że osoby A i B będą w tej samej grupie.*

Zadanie 68. *Pięciu chłopców i dwie dziewczynki ustawiono w szereg. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że dziewczynki stoją obok siebie.*

Zadanie 69. *W zbiorze* $2n$ *liczb* $(n \geqslant 1)$ *wyróżniono dwie. Czy bardziej prawdopodobne jest, że siadając losowo wokół stołu przy którym jest* $2n$ *miejsc, wyróżnione osoby znajdą się obok siebie, czy naprzeciw ?*

Zadanie 70. *Przy okrągłym stole usiadło losowo 6 osób, wśród nich Adam i Ewa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie siedzą obok siebie?*

Zadanie 71. *Iloma sposobami można ustawić 6 osób*

- *w rząd*
- *w koło?*

Zadanie 72. *Pięć osób zajęło losowo miejsca w ośmioosobowym przedziale kolejowym. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwie wyróżnione osoby usiadły*

- *na sąsiednich miejscach ?*
- *naprzeciwko siebie ?*

Zadanie 73. *Zbiór* $\{1, \dots, n\}, (n \geqslant 2)$*, dzielimy na dwa niepuste podzbiory. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że 1 i* n *będą w tym samym podzbiorze.*

Zadanie 74. *Encyklopedię 13-to tomową podzielono na dwie grupy liczące po odpowiednio 7 i 6 tomów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w pierwszej grupie są tomy od 1 to 3.*

3 Zadania różne

Zadanie 75. *Rzucamy dwiema kostkami. Niech zdarzenie* A *polega na tym, że suma wyników jest równa 4, a* B *- na tym, że przynajmniej na jednej kostce wypadła liczba parzysta. Opisać zdarzenie* $A \cap B$*.*

Zadanie 76. *Z talii 52 kart losujemy jedną. Z następujących zdarzeń wybrać pary zdarzeń wykluczających się:*

- A *- wylosowano króla,*
- B *- wylosowano pika,*
- C *- wylosowano kartę czerwoną,*
- D *- wylosowano kartę młodszą od 10.*

Zadanie 77. *Niech* A*,* B*,* C *będą zdarzeniami. Zapisać za pomocą działań na zbiorach następujące zdarzenia:*

a) zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A*,* B*,* C*;*

b) zachodzą dokładnie dwa zdarzenia spośród A*,* B*,* C*;*

c) zachodzą co najmniej dwa zdarzenia spośród A*,* B*,* C*;*

d) zachodzą nie więcej niż dwa zdarzenia spośród A*,* B*,* C*.*

Zadanie 78. *Niech* A *i* B *będą zdarzeniami. Za pomocą* A*,* B*,* A'*,* B' *i odpowiednich działań na zbiorach zapisać następujące zdarzenia spośród zdarzeń* A*,* B

a. zaszło co najmniej jedno,

b. zaszły oba,

c. zaszło tylko zdarzenie A*,*

d. zaszło dokładnie jedno, ale nie wiadomo które,

e. nie zaszło żadne ze zdarzeń.

Zadanie 79. *Niech* $\Omega = [0,1]$ *oraz niech* $\mathcal{F}$ *będzie pewnym* σ*-ciałem podzbiorów odcinka [0, 1]. Udowodnić, że funkcja*

$$P(A) = \begin{cases} 1 & gdy\ \frac{1}{2} \in A \\ 0 & gdy\ \frac{1}{2} \notin A \end{cases}$$

określona na zbiorach $A \in \mathcal{F}$ *spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.*

Zadanie 80. *Udowodnić własności prawdopodobieństwa.*

Zadanie 81. *Pokazać, że jeśli* $P(A) = 0.7$ *i* $P(B) = 0.8$*, to* $P(A \cap B) \geqslant 0.5$.

Zadanie 82. *Dane są* $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ *i* $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. *Obliczyć* $P(B')$, $P(A \cap B')$ *i* $P(B \setminus A)$.

Zadanie 83. *Dane są* $P(A' \cap B') = \frac{1}{2}$, $P(A') = \frac{2}{3}$, *ponadto* $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. *Obliczyć* $P(B)$ *i* $P(A' \cap B)$.

Zadanie 84. *Rzucamy niesymetryczną sześcienną kostką. Szóstka wypada z prawdopodobieństwem* $\frac{1}{4}$*, a pozostałe liczby mają równe szanse wypadnięcia. Obliczyć prawdopodobieńswto, że wypadnie nieparzysta liczba oczek.*

Zadanie 85. *Dwóch piłkarzy chodzi niezbyt regularnie na treningi. Jeden opuszcza 40% zajęć, a drugi chodzi na 70%. Jednocześnie są na 40% treningów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że na treningu*

a. jest dokładnie jeden z nich,

b. nie ma żadnego.

Zadanie 86. *Niech* $P(A) = x$, $P(B) = x^2$. *Wiadomo, że oba zdarzenia się wykluczają, ale jedno z nich musi zajść. Obliczyć* x.

Zadanie 87. *W wyniku doświadczenia możemy otrzymać jeden z trzech wzajemnie wykluczających się wyników: a, b, c. Niech prawdopodobieństwo otrzymania wyniku a lub b wynosi* $\frac{2}{3}$*, a wyniku b lub c* $\frac{3}{4}$. *Obliczyć prawdopodobieństwa*

Zadanie 88. *Wykazać, że jeśli* $P(A) + P(B) \geqslant 1$*, to* A *i* B *nie mogą się wykluczać.*

Zadanie 89. *Niech* $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$. *Czy zdarzenia* A *i* B *mogą się wykluczać?*

Zadanie 90. *Rzucamy niesymetryczną kostką sześcienną. Dwójka wypada z prawdopodobieństwem* $\frac{1}{3}$*, piątka* $\frac{1}{5}$*, a pozostałe liczby mają równe szanse wypadnięcia. Oblicz prawdopodobieństwo, że wypadnie liczba oczek mniejsza niż 4.*

Zadanie 91. *Towarzystwo ubezpieczeniowe wypłaca z pewnej polisy 7 kategorii odszkodowań. Prawdopodobieństwo, że klient otrzyma wypłatę pierwszego typu jest równe* $\frac{1}{3}$*, pozostałe kategorie mają jednakowe szanse. Jakie jest prawdopodobieństwo, że klient otrzyma wypłatę typu 1 lub 3 lub 4 lub 7?*

Zadanie 92. *Praca mechanika polega na zabezpieczaniu technicznej sprawności trzech maszyn:* M_1, M_2, M_3 *w ciągu odcinka czasu. W czasie tym każda z maszyn pracuje niezawodnie, albo wymaga interwencji mechanika. Niech* A_j, $j = 1, 2, 3$ *oznacza zdarzenie: maszyna* M_j *wymaga interwencji mechanika.*

a) Określić przestrzeń zdarzeń elementarnych.

b) Za pomocą zdarzeń elementarnych opisać zdarzenia A_1, A_1', A_2, A_2', A_3, A_3'.

c) Za pomocą działań: $\cup$, $\cap$, $'$, *wykonywanych na zdarzeniach* A_j *opisać zdarzenia* B_j *, jeżeli oznaczymy:*

B_1 – *zajście wszystkich trzech zdarzeń* A_1,A_2,A_3,

B_2 – *niezajście żadnego ze zdarzeń* A_1,A_2,A_3,

B_3 – *zajście tylko zdarzenia* A_1,

B_4 – *zajście tylko jednego spośród zdarzeń* A_1,A_2,A_3,

B_5 – *zajście co najmniej jednego ze zdarzeń* A_1,A_2,A_3,

B_6 – *zajście tylko zdarzeń* A_1 *i* A_2,

B_7 – *zajście dokładnie dwóch zdarzeń spośród zdarzeń* A_1,A_2,A_3,

B_8 – *zajście co najmniej dwóch zdarzeń spośród zdarzeń* A_1,A_2,A_3,

B_9 – *zajście co najwyżej jednego zdarzenia spośród zdarzeń* A_1,A_2,A_3.

d) Opisać określone wyżej zdarzenia B_j *za pomocą zdarzeń elementarnych.*

e) Znaleźć liczbę $n(\alpha)$ *wszystkich zdarzeń w tym doświadczeniu.*

Zadanie 93. *Stworzyć przestrzeń probabilistyczną doświadczenia z poprzedniego zadania zakładając, że wszystkie określone tam zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne.*

Zadanie 94. *Dla danych z poprzedniego zadania określić prawdopodobieństwo tego, że*

a) wszystkie 3 maszyny będą wymagały interwencji mechanika (zdarzenie A*),*

b) dokładnie 2 maszyny będą wymagały interwencji mechanika (zdarzenie B*).*

Zadanie 95. *Osoba* X *wykonuje pewną pracę w ciągu 4, 5, albo 6 godzin i może popełnić przy tym 0, 1, albo 2 błędy. Zakładając jednakowe prawdopodobieństwo dla każdego z 9 zdarzeń jednoelementowych, znaleźć prawdopodobieństwa następujący zdarzeń:*

a) praca zostanie wykonana w ciągu 4 godzin (zdarzenie A*),*

b) praca zostanie wykonana bezbłędnie w czasie 6 godzin (zdarzenie B*),*

c) praca zostanie wykonana w czasie 5 godzin najwyżej z jednym błędem (zdarzenie C*),*

d) praca zostanie wykonana z co najwyżej jednym błędem (zdarzenie D*).*

Zadanie 96. *Z* n*-elementowego zbioru* A *losujemy ze zwrotem* k*-elementów. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie wylosowane elementy są różne.*

Zadanie 97. *Ze zbioru* n *elementów, wśród których jest* n_1 *elementów mających cechę* C *i* $n_2 = n - n_1$ *elementów nie mających tej cechy, losujemy dwukrotnie po jednym elemencie. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że obydwa elementy wylosowane mają cechę* C*. Przyjąć* $n = 10$, $n_1 = 7$.

Zadanie 98. *Opiekun 20-osobowej grupy studenckiej w której (jak się później okazało) było 8 studentów aktywnych społecznie, wytypował na okres dwu tygodni (aby dać czas poznanie się grupy) 3-osobowy samorząd studencki. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że taki samorząd składać się będzie z samych studentów aktywnych społecznie*

Zadanie 99. *Spośród cyfr* $1, \ldots, 9$ *wylosowano bez zwrotu kolejno trzy cyfry:* C_1, C_2, C_3 *układając je w kolejności losowania w liczbę, która w układzie dziesiętnym ma zapis* $C_1C_2C_3$*. Przyjmując sensowne założenie, że wszystkie możliwe do otrzymania w ten sposób liczby są jednakowo prawdopodobne, obliczyć prawdopodobieństwo tego, że* $C_1C_2C_3 < 444$.