Lista druga* †
Rachunek prawdopodobieństwa
kierunek: Informatyka i ekonometria, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

Zadanie 1. *Rzucamy3 razy monetą. Opisać przestrzeń probabilistyczną odpowiadającą temu doświadczeniu (co to są Ω, Σ, P?).*

Zadanie 2. *Rzucamy 5 kostkami do gry. Wypisać wszystkie zdarzenia elementarne. Czy możemy to zrobić w rozsądnym czasie. Jak inaczej opisać zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych?*

Zadanie 3. *Cyfry $0, 1, 2, \ldots, 9$ ustawiono losowo. Jakie jest prawdopodobieństwo, że*

a. między 0 i 1 znajdują się dokładnie cztery cyfry?

b. 7, 8 i 9 będą stały obok siebie?

Zadanie 4. *Rzucamy dwiema kostkami. Obliczyć prawdopodobieństwo, że iloczyn liczb równych wyrzuconym oczkom jest liczbą parzystą.*

Zadanie 5. *W urnie są 2 kule białe i 4 czarne. Losujemy 2 kule bez zwracania. Co jest bardziej prawdopodobne, wyciągnięcie kul*

a. tego samego koloru;

b. różnych kolorów?

Zadanie 6. *W urnie znajdują się kule białe i czarne. Udowodnić, że prawdopodobieństwo wylosowania ze zwracaniem dwóch kul tego samego koloru jest nie mniejsze niż 0.5.*

Zadanie 7. *W n rozróżnialnych komórkach rozmieszczono losowo r nierozróżnialnych cząstek, zakładamy, że wszystkie możliwe rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne. Obliczyć prawdopodobieństwo, że*

a. ustalona komórka zawiera dokładnie k cząstek ($k \leqslant r$);

b. dokładnie m komórek zostało pustych ($m \leqslant n$);

c. w każdej komórce są co najmniej dwie cząstki ($r \geqslant 2n$).

Zadanie 8. *Na ile sposobów można k jednozłotówek i m pięciozłotówek rozmieścić w n ponumerowanych kasetkach?*

Zadanie 9. *Rzucamy n kostkami, obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia n_1 jedynek, n_2 dwójek, ..., n_6 szóstek, gdzie $\sum_{i=1}^{6} n_i = n$.*

Zadanie 10. *Z 52 kart wylosowano 6. Jaka jest szansa, że wśród wylosowanych kart będą karty czerwone i czarne?*

† Zadania 1–22 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej ze strony znajdującej się pod adresem http://math.uwb.edu.pl/%7Euostasze/rachiie16.html.

Zadanie 11. *Z 52 kart losujemy 3. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród wylosowanych kart jest przynajmniej jeden as.*

Zadanie 12. *Przy okrągłym stole usiadło dziesięć dziewcząt i dziesięciu chłopców. Jaka jest szansa, że osoby tej samej płci nie siedzą obok siebie? Jakie jest prawdopodobieństwo, że trzy ustalone osoby będą siedziały obok siebie?*

Zadanie 13. *W zbiorze $2n$ osób ($n \geqslant 1$) wyróżniono dwie. Czy bardziej prawdopodobne jest, że siadając losowo wokół stołu przy którym jest $2n$ miejsc, wyróżnione osoby znajdą się obok siebie, czy na przeciw?*

Zadanie 14. *Pięć zeszytów wrzucamy do trzech szuflad. Co jest bardziej prawdopodobne*

a. *w pewnej szufladzie będą co najmniej trzy zeszyty;*

b. *co najmniej jedna szuflada będzie pusta?*

Zadanie 15. *(problem roztargnionej sekretarki) Do n zaadresowanych kopert włożono w sposób losowy n listów do różnych adresatów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że chociaż jeden list trafi do właściwej koperty. Wyznaczyć granicę tego prawdopodobieństwa gdy $n \to \infty$.*

Zadanie 16. *Rzucamy dwiema kostkami. Obliczyć prawdopodobieństwo, że suma liczb równych wyrzuconym oczkom wynosi co najmniej 5.*

Zadanie 17. *Z 52 kart wylosowano 13. Jaka jest szansa, że wśród wylosowanych kart będą reprezentowane wszystkie wartości?*

Zadanie 18. *Ze zbioru liczb $\{1, 2, 3, \ldots, 150\}$ losujemy jedną liczbę. Oblicz prawdopodobieństwo wylosowania liczby podzielnej*

a. *przez 10;*

b. *przez 4;*

c. *przez 10 i przez 4;*

d. *przez 10 lub przez 4.*

Zadanie 19. *Ze zbioru $A = \{1, 2, 3, \ldots, 102\}$ losujemy dwie liczby. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma wylosowanych liczb jest podzielna przez 3.*

Zadanie 20. *Winda rusza z siedmioma pasażerami i zatrzymuje się na 10 piętrach. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z pasażerów wysiądzie na innym piętrze?*

Zadanie 21. *Z urny zawierającej n kul, w tym 6 białych, losujemy kolejno dwie kule bez zwracania. Dla jakich wartości n prawdopodobieństwo wylosowania dwóch białych kul będzie większe od 0.25?*

Zadanie 22. *Niech P_1 i P_2 będą prawdopodobieństwami określonymi na σ-ciele Σ podzbiorów Ω. Udowodnić, że funkcja*

$$P(A) = \frac{1}{3}P_1(A) + \frac{2}{3}P_2(A)$$

spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa.