Lista czwarta* †
Rachunek prawdopodobieństwa
kierunek: Informatyka i ekonometria, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

1 Schemat Bernoulliego

Zadanie 1. *Co jest bardziej prawdopodobne: wygrać z równorzędnym przeciwnikiem*

- *2 partie z 3, czy*
- *3 partie z 5 ?*

Zadanie 2. *W centrali telefonicznej jest n linii, z których każda niezależnie od pozostałych może być zajęta. Prawdopodobieństwo, że dana linia jest wolna wynosi p. Znaleźć najbardziej prawdopodobną liczbę linii wolnych.*

Zadanie 3. *Zdarzenie A pojawia się z tym samym prawdopodobieństwem w ciągu niezależnych doświadczeń losowych. Prawdopodobieństwo, że A nastąpi w ciągu czterech doświadczeń przynajmniej raz wynosi $\frac{1}{2}$. Jakie jest prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia A w jednym doświadczeniu?*

Zadanie 4. *Jakie jest prawdopodobieństwo parzystej ilości sukcesów w schemacie Bernoulliego, jeśli $p = \frac{1}{2}$?*

Zadanie 5. *Jakie jest prawdopodobieństwo parzystej ilości sukcesów w schemacie Bernoulliego, jeśli p jest dowolne?*

Zadanie 6. *Ile razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo wypadnięcia "5" było niemniejsze niż $\frac{1}{2}$?*

Zadanie 7. *Prawdopodobieństwo wypadku akrobaty przy pierwszym w danym dniu występie wynosi $\frac{1}{10000}$, natomiast przy drugim $\frac{1}{1000}$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że akrobata nie będzie miał wypadku pod czas 100 kolejnych występów, przy założeniu, że*

- *ma jeden występ dziennie,*
- *ma dwa występy dziennie.*

Zadanie 8. *W ciągu godziny jest średnio 60 zgłoszeń. Telefonistka wyszła na pół minuty. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w tym czasie:*

- *nie będzie żadnego zgłoszenia;*
- *będzie dokładnie jedno zgłoszenie?*

Wsk. Skorzystać z tw. Poissona. Czemu jest równa wartość oczekiwana dla rozkładu Poissona?

Zadanie 9. *Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że przy n niezależnych rzutach monetą liczba uzyskanych orłów będzie większa niż liczba uzyskanych reszek.*

†Zadania 25–42 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej ze strony znajdującej się pod adresem http://math.uwb.edu.pl/%7Euostasze/rachiie16.html.

Zadanie 10. *Centrala abonencka obsługuje 10 telefonów. Prawdopodobieństwo, że w ciągu t- minut zadzwoni jeden abonent wynosi 0,4. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu t minut zadzwoni:*

- *15 abonentów;*
- *ca najmniej 2 abonentów;*
- *nie więcej niż 3 abonentów.*

Zadanie 11. *Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że w 10 rzutach monetą orzeł wypadnie*

- *dokładnie 2 razy;*
- *co najwyżej dwa razy;*
- *co najmniej dwa razy.*

Zadanie 12. *Jeżeli przeciętnie 5 dni w tygodniu jest deszczowych, to jakie jest prawdopodobieństwo, że 2 dni z 3 będą pogodne?*

Zadanie 13. *Obliczyć prawdopodobieństwo, że wśród 500 osób co najmniej 2 osoby będą miały urodziny w Nowy Rok, jeśli przyjmiemy, że rok liczy 365 dni.*

Zadanie 14. *Średnio 977 ziarna na 1000 kiełkuje. Jakie jest prawdopodobieństwo, że siejąc 1000000 ziaren 995000 wykiełkuje.*

Zadanie 15. *Prawdopodobieństwo trafienia samolotu z pojedynczego działa wynosi* $0,1$. *Samolot został ostrzelany salwą z 10 dział. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że samolot został trafiony.*

Zadanie 16. *Prządka obsługuje 1000 wrzecion. Wiadomo, że prawdopodobieństwo zerwania się nitki jednego wrzeciona w ciągu 1 minuty wynosi* $0,004$. *Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu 1 minuty zerwą się co najwyżej 3 nitki na trzech wrzecionach.*

Zadanie 17. *Prawdopodobieństwo awarii sieci cieplnej na danym osiedlu w ciągu jednej doby wynosi* $0,2$. *Obliczyć prawdopodobieństwo, że w ciągu 15 dni nastąpi:*

- *5 awarii;*
- *najwyżej dwie awarie.*

Zadanie 18. *Sześci robotników korzysta z przerwami i niezależnie od siebie z energii elektrycznej. Każdy z nich podłączony jest średnio 8 minut w ciągu godziny. Sieć elektryczna jest przeciążona jeśli co najmniej 5 robotników pobiera energię elektryczną. Obliczyć prawdopodobieństwo przeciążenia sieci.*

Zadanie 19. *Obliczyć prawdopodobieństwo, że losują ze zwracaniem trzy razy po trzy kule z urny zawierającej 7 kul białych, 5 czarnych i 3 niebieskie otrzymamy dokładnie 2 razy różnokolorowe kule.*

Zadanie 20. *Grupa studentów licząca 22 osoby pisze kolokwium. Obliczyć prawdopodobieństwo, że dokładnie dwie osoby zaliczą je, jeśli prawdopodobieństwo zaliczenia kolokwium przez pojedynczego studenta wynosi 0,1.*

Zadanie 21. *W urnie znajduje się 18 kul czarnych i 12 białych. Losujemy kule pojedynczo za każdym razem zwracając. Obliczyć prawdopodobieństwo*

- *wszystkie trzy kule są czarne;*
- *otrzymano dokładnie dwie kule czarne.*

Zadanie 22. *Pewne zdarzenie może zajść w dowolny dzień tygodnia z takim samym prawdopodobieństwem Obliczyć prawdopodobieństwo nie zajścia zdarzenia w określony dzień tygodnia (np. w środę) w ciągu 12 kolejnych tygodni, jeśli wiadomo iż zdarzenie zachodzi każdego tygodnia.*

Zadanie 23. *Na przystanku tramwajowym czeka 10 pasażerów. Wiedząc, że tramwaj składa się z dwóch wagonów obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że do każdego wagonu wsiądzie po 5 pasażerów.*

Zadanie 24. *Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia A w pojedynczym doświadczeniu jest równe* $p > 0$. *Oszacować liczbę niezależnych doświadczeń n by prawdopodobieństwo zdarzenia, że chociaż w jednym z tych doświadczeń wystąpi zdarzenie A było większe lub równe niż* $p_0, p < p_0 < 1$.

2 Zadania różne

Zadanie 25. *Niech zdarzenia A, B są niezależne. Udowodnić, że są niezależne następujące zdarzenia*

- A, B';
- A', B;
- A, $\emptyset$;
- A, Ω;
- A, $B \cup C$, *jeśli* $B \cap C = \emptyset$, A *i* C *są niezależne;*
- A', B'.

Zadanie 26. *Niech $A \subseteq B$, A i C oraz B i C są niezależne. Udowodnij, że wtedy $B \setminus A$ i C są również niezależne.*

Zadanie 27. *Wykaż, że jeśli $P(A) = a$, $P(B) = b$, gdzie $b \neq 0$, to $P(A|B) \geqslant 1 - \frac{1-a}{b}$.*

Zadanie 28. *Rzucamy trzema kostkami do gry. Niech A oznacza zdarzenie polegające na tym, że na każdej kostce wypadła inna liczba oczek, B oznacza zdarzenie, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka? Czy zdarzenia A i B są niezależne?*

Zadanie 29. *Trzech studentów przygotowywało się niezależnie do egzaminu z rachunku prawdopodobieństwa. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że trzeci z nich zdał, jeśli wiadomo, że zdało dwóch, a prawdopodobieństwa zdania dla poszczególnych studentów wynoszą odpowiednio: $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.5$, $p_3 = 0.4$.*

Zadanie 30. *Rzucono 10 razy kostką. Jaka jest szansa otrzymania:*

a) 6 oczek co najmniej raz?

b) 5 oczek dokładnie 3 razy?

Zadanie 31. *Rzucono 10 razy symetryczną kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w pierwszym rzucie otrzymano szóstkę, jeśli wiadomo, że otrzymano 3 szóstki?*

Zadanie 32. *Ile razy należy rzucić kostką, aby prawdopodobieństwo wypadnięcia pięciu oczek było nie mniejsze niż $\frac{1}{2}$?*

Zadanie 33. *Rzucamy n razy kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że:*

a) sześć oczek pojawi się dokładnie raz;

b) sześć oczek pojawi się co najmniej raz.

Zadanie 34. *Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pan Kowalski nie trafi nawet czwórki grając przez rok dwa razy w tygodniu w Totolotka (typując 6 liczb z 49)?*

Zadanie 35. *Jaka jest najbardziej prawdopodobna liczba szóstek, przy 100 rzutach kostką?*

Zadanie 36. *Owad składa k jajeczek z prawdopodobieństwem $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $\lambda > 0$. Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem p, niezależnie od innych. Znaleźć prawdopodobieństwo, że liczba potomków będzie równa l.*

Zadanie 37. *Zdarzenia A i B są niezależne i takie, że $P(A \cup B) = 1$. Udowodnić, że $P(A) = 1$ lub $P(B) = 1$.*

Zadanie 38. *Z talii 52 kart losujemy jedną. Zdarzenie A polega na tym, że wylosowana karta jest asem, B na tym, że wylosowana karta jest pikiem, C – wylosowana karta jest blotką. Zbadać niezależność zdarzeń A i C oraz niezależność zdarzeń A i B.*

Zadanie 39. *Rzucamy dwiema kości do gry i określamy trzy zdarzenia: A – pojawienie się parzystej liczby oczek na pierwszej kości, B – pojawienie się nieparzystej liczby oczek na drugiej kości i C – pojawienie się na obu kościach liczby oczek, których suma jest większa od 7. Zbadać niezależność zdarzeń A, B i C.*

Zadanie 40. *Na odcinku* $[0,1]$ *umieszczamy losowo i niezależnie punkty* x *i* y*. Niech* A *będzie zdarzeniem polegającym na tym, że* $x^2+y^2 \leqslant 1$*, natomiast* B *zdarzeniem polegającym na tym, że* $x < y$*. Czy zdarzenia* A *i* B *są niezależne?*

Zadanie 41. *Z kuli o promieniu* R *wylosowano* N *punktów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że odległość od środka kuli do najbliżej położonego punktu jest większa lub równa* a*,* $0 < a < R$*.*

Zadanie 42. *Przeprowadzono serię doświadczeń według schematu Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w każdym doświadczeniu równym* p*. Obliczyć prawdopodobieństwo uzyskania* r*-tego sukcesu dokładnie w* $(k+r)$*-tym doświadczeniu,* $k = 0, 1, 2, \ldots$*.*

Zadanie 43. *Wieloletnie obserwacje pogody w pewnej miejscowości wykazały, że w 20% dni w listopadzie pogoda jest bezchmurna, a w 20% dni pochmurnych pada deszcz. Obliczyć procent dni w listopadzie kiedy pada deszcz oraz prawdopodobieństwo tego, że pewien z góry zadany dzień będzie deszczowy.*