Lista dziesiąta[*] [†]
Rachunek prawdopodobieństwa
kierunek: Informatyka i ekonometria, studia I°

dr Jarosław Kotowicz

1 Zadania różne

Zadanie 1. *Z klasycznej nierówności Czebyszewa ocenić prawdopodobieństwo, że zmienna losowa normalna (tzn.* $\mathcal{N}(0,1)$*) odchyli się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż*

- *cztery średnie odchylenia,*
- *trzy średnie odchylenia.*

Zadanie 2. *Rzucamy* n *razy monetą. Niech* X *ilość orłów. Korzystając z nierówności Czebyszewa znaleźć takie* n *aby*

$$P\left(\left|\frac{1}{n}X - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}\right) > \frac{9}{10}.$$

Zadanie 3. *Strzelamy 300 razy do tarczy z prawdopodobieństwem trafienia w jednym strzale wynoszącym* 0.25*. Z nierówności Czebyszewa ocenić* $P(|X-75|<30)$*, gdzie* X *jest ilością trafień.*

Zadanie 4. X *ma rozkład normalny* $\mathcal{N}(0,1)$*. Oszacować z góry* $P(|X| \geqslant 3)$ *przy pomocy:*

- *nierówności Czebyszewa,*
- *tablic.*

Zadanie 5. *Zmienne losowe* X_i*,* $i \in \mathbb{N}$ *są niezależne i mają jednakowe rozkłady* $P(X_i = k) = 0.2$*, gdzie* $k = 1,2,3,4,5$*. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zmienna* $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ *przyjmie wartość większą od 320.*

Zadanie 6. *Niech zmienna losowa* X *przyjmuje wartości dodatnie i istnieje* $\mathbb{E}(X)$ *oraz* $\mathbb{E}(X) = a$*. Udowodnić, że wtedy* $P(X \geqslant 2a) \leqslant \frac{1}{2}$*.*
Wsk. Zastosować nierówność Markowa.

Zadanie 7. *Rzucamy* n *razy symetryczną monetą. Niech zmienna losowa* X_k *oznacza wyrzucenie orła za* k *razem. Korzystając z nierówności, Czebyszewa oszacować* n *aby*

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10}\right) > \frac{9}{10}.$$

Zadanie 8. *Przy jakiej liczbie rzutów kostką prawdopodobieństwo tego, że częstość wypadnięcia szóstki różni się od* $\frac{1}{6}$ *nie mniej niż o* $\frac{1}{36}$*, jest mniejsze niż* 0.1*?*

Zadanie 9. X *ma rozkład jednostajny na odcinku* $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$*.*

- *Oszacować z nierówności Czebyszewa* $P(|X| \geqslant \frac{3}{2})$*.*

[†] Zadania 1–22 pochodzą od dr U. Ostaszewskiej znajdującej się pod adresem
http://math.uwb.edu.pl/%7Euostasze/rachiie16.html.

- *Obliczyć* $P(|X| \geqslant \frac{3}{2})$ *bezpośrednio.*

Zadanie 10. *Rzucamy 180 razy kostką do gry. Obliczyć prawdopodobieństwo, że otrzymamy 32 razy szóstkę.*

Zadanie 11. *Korzystając z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że w 720 rzutach kostką ilość szóstek będzie*

- *zawierać się pomiędzy 121 a 140,*
- *mniejsza niż 125,*
- *większa niż 110.*

Zadanie 12. *Wykonujemy 1000 rzutów symetryczną kostką. Korzystając z twierdzenia Moivre'a-Laplace'a oszacować przedział, w jaki z prawdopodobieństwem* 0.9 *wpada ilość otrzymanych szóstek.*

Zadanie 13. *Wydział Matematyki pragnąłby przyjąć nie więcej niż 120 kandydatów. Zdających jest 250, a szansa zaliczenia testu wynosi 0,4. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wydział będzie miał kłopot z nadmiarem kandydatów?*

Zadanie 14. *Stosując twierdzenie Moivre'a-Laplace'a obliczyć prawdopodobieństwo tego, że w 800 niezależnych próbach ilość sukcesów będzie większa niż 150, a mniejsza niż 250, jeśli prawdopodobieństwo sukcesu w każdej próbie jest równe* 0.25*.*

Zadanie 15. *Na campusie uniwersyteckim są dwie restauracje po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad a wybory restauracji dokonują losowo -powiedzmy, rzucając symetryczną monetą. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?*

Zadanie 16. *Prawdopodobieństwo pojawienia się zdarzenia w jednym doświadczeniu wynosi 0,3. Z jakim prawdopodobieństwem można twierdzić, że częstość tego zdarzenia przy 100 doświadczeniach będzie zawarta w granicach od 0,2 do 0,4?*

Zadanie 17. *Rzucono 1000 razy kostką. Znaleźć prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie zawarta między 3410 a 3590?*

Zadanie 18. *Na poczcie pojawia się 100 klientów dziennie, każdy z nich dokonuje wpłaty (bądź wypłaty)* X_i, $i = 1, 2, \ldots, 100$, *gdzie* X_i *są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, zerowej średniej i wariancji równej 1002 . Ile gotówki należy mieć w kasie rano, by z prawdopodobieństwem 0,99 na koniec dnia nie zabrakło pieniędzy? Zakładamy, że w ciągu dnia ewentualne braki uzupełnia naczelnik, ale wieczorem chce odzyskać swoje pieniądze.*

Zadanie 19. *W Polsce jest 24,6 mln podatników i każdy z nich myli się przy wypełnianiu zeznania podatkowego. Wartość błędu dla i-tego podatnika jest zmienna losową* X_i, *gdzie* $\mathbb{E}(X_i) = 0$ *i* $Var(X_i) = 10000$ *, czyli* $\sqrt{Var(X_i)} = 100$ *(złotych); ponadto zakładamy niezależność* X_i*. Jaka jest szansa, że straty państwa w wyniku tych błędów przekroczą 1 grosz na podatnika? A 3 grosze?*

Zadanie 20. *Funkcja*

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ \frac{2}{3} & \text{dla } x \in [0, 1) \\ 0\frac{1}{3} & \text{dla } x \notin (-1, 1) \end{cases}$$

jest gęstością każdej z n niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$*. Niech* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$*. Znaleźć przybliżoną wartość prawdopodobieństwa* $P(S_n < 13)$ *dla* $n = 60$*.*

Zadanie 21. *Zmienne losowe* $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ *są niezależne o jednakowych rozkładzie Poissona z parametrem* $\lambda = 2$*. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia*

$$P\left(190 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 220\right).$$

Zadanie 22. *Losowy błąd pomiaru pewnej wielkości ma rozkład o wartości przeciętnej 0 i odchyleniu standardowym 0,08. Obliczyć prawdopodobieństwo, że błąd średniej arytmetycznej 100 pomiarów nie przekroczy (co do wartości bezwzględnej) 0,1.*