Notatki do wykładu z ***Analizy Matematycznej*** dla II roku[1] studiów zawodowych z matematyki

Jarosław Kotowicz
Instytut Matematyki Uniwersytet w Białymstoku

23 stycznia 2008

Spis treści (wykładów)

Wstęp

Niniejsze notatki mają służyć usystematyzowaniu wiedzy z wykładów. Ponieważ niekiedy umykają na wykładzie konieczne fakty umieszczam je w tych notatkach wyróżniając je czerwoną czcionką[1].

Jeśli chodzi natomiast o literaturę do rachunku różniczkowego funkcji i odwzorowań[2] wielu zmiennych rzeczywistych to polecam podręczniki W. Rudina *„Podstawy analizy matematycznej”* [4], W. Kołodzieja *„Analizy matematyczna”*, K. Maurina *„Analiza”* t.1 [3], czy też A. Birkholz *„Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych”* [1]. Osoby zainteresowane mogą znaleźć jeszcze kilka podręczników w języku polskim, jak też w językach obcych.

[1] Niektóre z zaznaczonych fragmentów już odznaczyłem

[2] W skrypcie funkcja wielu zmiennych rzeczywistych ma wartości w zbiorze liczb rzeczywistych, natomiast odwzorowanie w $\mathbb{R}^d$.

Część I

Semestr zimowy

Wykład 1

02.10.2007

Niech d będzie dowolną liczbą naturalną.

$$\mathbb{R}^d \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \ldots, x_d); x_i \in \mathbb{R} \wedge i \in \overline{1, d}\}.$$

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \Leftrightarrow \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d).$$

Uwaga 1.1 *Na I roku na wykładzie z analizy matematycznej elementy $\mathbb{R}^d$ nazywaliśmy wektorami. Na tym wykładzie będziemy myśleć dualnie o nich jako o wektorach i jako o punktach.*

Uwaga 1.2 *Wiadomo z wykładu algebry liniowej, że $(\mathbb{R}^d, +, \cdot, \mathbf{0})$ jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$ (dodawanie, to dodawanie po współrzędnych, a mnożenie przez liczbę, to mnożenie po współrzędnych, element (wektor) zerowy, to $(0, \ldots, 0)$).*

Definicja 1.1 *Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ będą dowolne. Naturalny (euklidesowy) iloczyn skalarny punktów elementów z $\mathbb{R}^d$ oraz normę euklidesową elementu[1] generowaną przez iloczyn skalarny określamy następująco:*

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{d} x_i y_i \tag{1.1}$$

$$\|\mathbf{x}\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{y})} \equiv \sqrt{\sum_{n=1}^{d} x_i^2}. \tag{1.2}$$

Wniosek 1.1 *Niech $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$ będą dowolnymi elementami z $\mathbb{R}^d$, zaś α dowolną liczbą rzeczywistą. Wtedy iloczyn skalarny posiada następujące własności*

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x}); \tag{1.3}$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}|\mathbf{z}) = (\mathbf{x}|\mathbf{z}) + (\mathbf{y}|\mathbf{z}); \tag{1.4}$$

$$(\alpha \cdot \mathbf{x}|\mathbf{y}) = \alpha \cdot (\mathbf{x}|\mathbf{y}), \tag{1.5}$$

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geqslant 0, \tag{1.6}$$

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}, \tag{1.7}$$

a norma euklidesowa między innymi następujące:

$$\|\mathbf{x}\| \geqslant 0; \tag{1.8}$$

$$\|\alpha \cdot \mathbf{x}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{x}\|; \tag{1.9}$$

$$\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{1.10}$$

Uwaga 1.3 [2] *W kwestii oznaczania iloczyny skalarnego. Na wykładzie z Analizy Matematycznej na I roku iloczyn skalarny oznaczaliśmy $\circ$. Na tym wykładzie również. Jednak z powodu, że złożenie odwzorowań jest również oznaczane tym samym symbolem, a na następnym wykładzie wprowadzamy iloczyn skalarny funkcji zdecydowałem się na zmianę oznaczenia na najczęściej stosowane oznaczenie na Analizie Funkcjonalne $(\cdot|\cdot)$.*

[1] Nazywaliśmy to długością wektora na I roku

[2] Informacja podana na wykładzie w dniu 18.10.2007r.

Twierdzenie 1.1 (nierówność Schwarza) *Jeżeli dane są dowolne elementy* $\mathbf{x}$ *i* $\mathbf{y}$ *z* $\mathbb{R}^d$*, to*

$$|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \leqslant \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|. \tag{1.11}$$

Wniosek 1.2 *Niech* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *będą dowolnymi elementami z* $\mathbb{R}^d$*. Wtedy*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|. \tag{1.12}$$

Uwaga 1.4 *Możemy więc określić metrykę* $d_{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ *wzorem*

$$\forall_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^d} d_{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \tag{1.13}$$

Nazywamy ją metryką euklidesową, a przestrzeń metryczną $(\mathbb{R}^d, d_{\mathcal{E}})$ *nazywamy d-wymiarową przestrzenią euklidesową i oznaczamy ją* $\mathcal{E}^d$*.*

Natomiast $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ *nazywamy przestrzenią unormowaną.*

Uwaga 1.5 [3] *Zauważmy, że oznaczenie metryki dla prostej euklidesowej i d-wymiarowej przestrzeni euklidesowej jest identyczne. Taka sama sytuacja ma miejsce dla różnych liczb naturalnych* d_1 *i* d_2*. Jednak gdybyśmy chcieli wprowadzać rozróżnienie tych metryk musielibyśmy pisać więcej indeksów, a to gmatwałoby elegancje i prostotę zapisów.*

Uwaga 1.6 *Ponieważ* $\mathcal{E}^d$ *jest przestrzenią metryczną, więc będziemy wykorzystywać pojęcia* ***ciągu zbieżnego, granicy ciągu i ciągu Cauchy'ego****, które zostały już zdefiniowane na I roku dla ogólnej przestrzeni metrycznej. Pojęcie* ***podciągu*** *jest przenoszone z ciągów liczbowych bez zmiany. Natomiast pojęcie* ***ciągu ograniczonego*** *otrzymujemy analogicznie jak dla ciągów liczbowych zastępując wartość bezwzględną normą euklidesową, ewentualnie korzystając z definicji funkcji ograniczonej w przestrzeni metrycznej. Ponadto będziemy wykorzystywać* ***twierdzenie o jednoznaczności granicy ciągu****, jak również* ***twierdzenia o granicy podciągów****, które pozostają prawdziwe.*

Uwaga 1.7 *W przypadku ciągów w* $\mathcal{E}^d$ *nie ma takich pojęć, jak* ***iloczyn ciągów, ciągi monotoniczne, ciągi rozbieżne do nieskończoności****, czy też* ***granica górna, czy dolna ciągu****.*

Twierdzenie 1.2 *Niech* $(\mathbf{x}_n) \subset \mathbb{R}^d$*.Wtedy ciąg* $(\mathbf{x}_n)$ *ma granicę równą* $\mathbf{x}_0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego* $i \in \overline{1, d}$ *ciąg* $(x_i^n)_n$ *(ciąg i-tych współrzędnych) jest zbieżny do* x_i^0*.*

Twierdzenie 1.3 $\mathcal{E}^d$ *jest przestrzenią metryczną zupełną.*

Twierdzenie 1.4 (Bolzano-Weierstrassa) *Każdy ciąg ograniczony elementów z* $\mathbb{R}^d$ *zawiera podciąg zbieżny.*

Uwaga 1.8 *Ponieważ* $\mathbb{R}^d$ *jest też przestrzenią wektorową, to mamy też dwa działania na ciągach – dodawanie oraz mnożenie przez liczby. Wtedy słuszne jest twierdzenie:*

Twierdzenie 1.5 (działania na granicach ciągów.) *Jeżeli* $(\mathbf{x}_n), (\mathbf{y}_n) \subset \mathbb{R}^d$ *i* $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^d$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{y}_0$ *oraz* c *jest dowolną liczbą rzeczywistą, to*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}_0; \tag{1.14}$$

$$\lim_{n\to\infty} (c \cdot \mathbf{x}_n) = c \cdot \mathbf{x}_0; \tag{1.15}$$

$$\lim_{n\to\infty} (-\mathbf{x}_n) = -\mathbf{x}_0; \tag{1.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0. \tag{1.17}$$

Uwaga 1.9 *Z ogólnych pojęć dla przestrzeni metrycznych będziemy wykorzystywać następujące:* ***kula otwarta, kula domknięta, zbiór otwarty, zbiór domknięty, otoczenie punktu, otoczenie otwarte, punkt wewnętrzny, zbiór relatywnie otwarty, relatywnie domknięty, przestrzeń metryczna zupełna, domknięcie zbioru, punkt skupienia, punkt izolowany, zbiór ciągowo zwarty, zbiory oddzielone, zbiór spójny****.*

Szczególne przypadki twierdzeń dla $\mathcal{E}^d$ *podane są w dodatku do tego wykładu.*

[3] Informacja podana na wykładzie w dniu 18.10.2007r.

Twierdzenie 1.6 *$\mathcal{E}^d$ jest przestrzenią metryczną zupełną.*[4]

Definicja 1.2 *Niech $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$. Odcinkiem domkniętym o końcach $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ nazywamy zbiór*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = (1-t) \cdot \mathbf{a} + t \cdot \mathbf{b} \wedge t \in [0,1]\}$$

i oznaczamy go $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Analogicznie definiujemy odcinek otwarty $]\mathbf{a}, \mathbf{b}[$ (wtedy $t \in]0,1[$) i odcinki jednostronnie otwarte.

Uwaga 1.10 *Zauważmy, że w przeciwieństwie do $\mathcal{E}^1$ mamy dla odcinka domkniętego i otwartego równości*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{a}] \quad \textit{oraz} \quad]\mathbf{a}, \mathbf{b}[=]\mathbf{b}, \mathbf{a}[.$$

Twierdzenie 1.7 (Bolzano-Weierstrassa) *Odcinek $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, gdzie jest ciągowo zwarty w $\mathcal{E}^d$.*

Uwaga 1.11 *Zauważmy, że odcinek otwarty w $\mathcal{E}^d$ nie jest zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^d$, o ile $d > 1$.*

Twierdzenie 1.8 *Niech $K \subset \mathbb{R}^d$. Na $\mathcal{E}^d$ następujące warunki są równoważne*

K ciągowo zwarty w $\mathcal{E}^d$; (1.18)

K domknięty w $\mathcal{E}^d$ i ograniczony; (1.19)

Każdy nieskończony podzbiór K ma punkt skupienia należący do K. (1.20)

[4] Zgodnie z definicją przestrzeni Banacha oznacza to, że $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha.

Wykład 2

09.10.2007

Niech d będzie dowolną liczbą naturalną.

Twierdzenie 2.1 *$\mathbb{R}^d$ nie jest ciągowo zwarty w $\mathcal{E}^d$, tzn. $\mathcal{E}^d$ nie jest przestrzenią metryczną zwartą.*

Twierdzenie 2.2 *$\mathcal{E}^d$ jest przestrzenią metryczną lokalnie zwartą.*

Twierdzenie 2.3 *Przestrzeń metryczna (X,ρ) jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy jedyne zbiory otwarto-domknięte (tzn. jednocześnie otwarte i domknięte) to $\emptyset$ i X.*

Twierdzenie 2.4 *Niech (X,ρ) będzie przestrzenią metryczną, zaś $A, B \subset X$.*
Jeśli zbiory A i B są spójne i mają co najmniej jeden punkt wspólny, to ich suma $A \cup B$ też jest zbiorem spójnym.

Twierdzenie 2.5 *Niech $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$.*
Odcinek $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ jest zbiorem spójnym.

Definicja 2.1 *Niech $L \subset \mathbb{R}^d$.*
Powiemy, że L jest łamaną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba naturalna n oraz elementy $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^d$ takie, że

$$L = \bigcup_{k=1}^{n} [\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k] \tag{2.1}$$

$$\forall_{k \in \overline{1,n-1}} \operatorname{card}([\mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{b}_{k-1}] \cap [\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k]) = 1. \tag{2.2}$$

Definicja 2.2 *Niech $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$, zaś L będzie łamaną. Załóżmy, że n oraz $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}_1, \ldots \mathbf{b}_n \in \mathbb{R}^d$ są takie, jak w definicji łamanej L.*
Mówimy, że L jest łamaną łączącą punkty $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{a}_1 = \mathbf{p}$ oraz $\mathbf{b}_n = \mathbf{q}$.
Łamaną łączącą punkty $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ oznaczamy $L(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.

Uwaga 2.1 *Łamana może mieć punkty samoprzecięcia.*

Wniosek 2.1 *Łamana jest zbiorem spójnym.*

Twierdzenie 2.6 *Niech A będzie podzbiorem zbioru $\mathbb{R}^d$.*
Jeśli każde dwa punkty zbioru A można połączyć łamaną w nim zawartą, to zbiór A jest spójny w $\mathcal{E}^d$.

Twierdzenie 2.7 *Niech A będzie podzbiorem zbioru $\mathbb{R}^d$.*
Jeżeli A jest zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^d$, to zbiór A jest spójny w w $\mathcal{E}^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy każde jego dwa punkty zbioru A można połączyć łamaną w nim zawartą.

Wniosek 2.2 *$\mathcal{E}^d$ jest przestrzenią metryczną spójną.*

Definicja 2.3 *Obszarem w $\mathcal{E}^d$ nazywamy dowolny otwarty i spójny zbiór w $\mathcal{E}^d$.*

Granica funkcji.

Uwaga 2.2 *Ponieważ definicja granicy funkcji w punkcie wprowadziliśmy na I roku analizy matemaycznej dla odwzorowań z dowolnej przestrzeni metrycznej w inną przestrzeń metryczną, więc pozostaje ona słuszna dla odwzorowań w jednej przestrzeni euklidesowej w drugą.*

Sformułujemy teraz twierdzenia, które nie pojawiły się w zeszłym roku oraz twierdzenie ważne z pewnych powodów. Pierwsze z tych twierdzeń udowodnimy.

Niech r będzie liczbą naturalną większą od 1, G niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^r$, $\mathbf{p}$ punktem z $\mathbb{R}^r$.

Twierdzenie 2.8 (Kryterium Bolzano-Cauchy'ego) *Niech $\mathbf{p}$ będzie punktem skupienia zbioru G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Odwzorowanie f ma w punkcie $\mathbf{p}$ granicę wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in G} 0 < d_{\mathcal{E}^r}(\mathbf{x},\mathbf{p}) < \delta \wedge 0 < d_{\mathcal{E}^r}(\mathbf{y},\mathbf{p}) < \delta \Rightarrow d_{\mathcal{E}^d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) < \varepsilon. \tag{2.3}$$

Uwaga 2.3 *Niech $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Z każdym odwzorowaniem f związane jest d funkcji $f_1, \ldots, f_d$ o tej samej dziedzinie, ale o wartościach rzeczywistych w sposób następujący

$$\forall_{i\in\overline{1,d}} f_i(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} (f(\mathbf{x}))_i.$$

Są to tzw. składowe odwzorowania f. Zapisujemy wtedy $f = (f_1, \ldots, f_d)$.

Twierdzenie 2.9 *Niech $\mathbf{p}$ będzie punktem skupienia zbioru G, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ punktem z $\mathbb{R}^d$, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$, to dla dowolnego $i \in \overline{1,d}$ mamy

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f_i(\mathbf{x}) = a_i. \tag{2.4}$$

Ponadto, jeżeli dla dowolnego $i \in \overline{1,d}$ zachodzi warunek (2.4), to $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$.

Uwaga 2.4 [1] *Zauważmy, że ostatnie twierdzenie redukuje problem liczenia granicy odwzorowania $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ do liczenia granic funkcji o dziedzinie G i wartościach w $\mathbb{R}$. Oznacza to, że aby to o czym tu mówimy nie było powtórzeniem tego co było robione na Analizie Matematycznej na I roku nasze funkcje muszą mieć dziedzinę będącą podzbiorem $\mathcal{E}^r$ dla $r > 1$.*

Uwaga 2.5 *Substytutem możenia funkcji o wartościach rzeczywistych dla funkcji o wartościach w przestrzeni euklidesowej, gdzie $d > 1$, jest iloczyn skalarny. Jednak nie jest to dokładny odpowiednik, gdyż iloczyn skalarny takich funkcji jest już funkcją o wartościach rzeczywistych.*

Jednak przed udowodnieniem twierdzenia o granicy iloczynu skalarnego funkcji wprowadzimy pojęcie iloczynu skalarnego ciągów z $\mathbb{R}^d$ i udowodnimy twierdzenie iloczynu skalarnego ciągów zbieżnych.

Definicja 2.4 *Niech dane będą ciągi $(\mathbf{x}_n), (\mathbf{y}_n) \subset \mathbb{R}^d$. Wtedy ciąg liczbowy (c_n) nazywamy iloczynem skalarnym ciągów $(\mathbf{x}_n)$ i $(\mathbf{y}_n)$, co zapisujemy $((\mathbf{x}_n)|(\mathbf{y}_n)) = (c_n)$, wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby naturalnej n mamy*

$$c_n = x_1^n y_1^n + \ldots + x_d^n y_d^n \equiv (\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_n).$$

Uwaga 2.6 *Analogicznie można określić iloczyn skalarny funkcji jako $(f|g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f(x)|g(x))$.*

Twierdzenie 2.10 (o granicy iloczynu skalarnego ciągów) *Jeżeli $(\mathbf{x}_n), (\mathbf{y}_n) \subset \mathbb{R}^d$ i $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^d$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{y}_n = \mathbf{y}_0$, to*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x}_n|\mathbf{y}_n) = (\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_0). \tag{2.5}$$

[1] Informacja podana na wykładzie w dniu 18.10.2007r.

Twierdzenie 2.11 *Niech* $\mathbf{p}$ *będzie punktem skupienia zbioru* G*,* $\mathbf{a}$ *i* $\mathbf{b}$ *punktami z* $\mathbb{R}^d$*,* $f, g\colon G \to \mathbb{R}^d$ *dowolnymi odwzorowaniami,* α *dowolną liczbą rzeczywistą.*

Jeżeli $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ *i* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$*, to wówczas*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (f+g)(\mathbf{x}) = \mathbf{a}+\mathbf{b}; \tag{2.6}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (f|g)(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}|\mathbf{b}); \tag{2.7}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (a\cdot f)(\mathbf{x}) = \alpha\cdot\mathbf{a}; \tag{2.8}$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (f-g)(\mathbf{x}) = \mathbf{a}-\mathbf{b}. \tag{2.9}$$

Uwaga 2.7 *Nowymi pojęciami, które pojawią się przy pojęciu granicy funkcji o dziedzinie będącej podzbiorem przestrzeni euklidesowej są tzw. granice iterowane. Dla prostoty zapisu i jasności twierdzenia granice iterowane omówimy, gdy* $r = 2$ *tzn. płaszczyzny euklidesowej i funkcji o dziedzinie będącej podzbiorem* $\mathbb{R}^2$ *i wartościach rzeczywistych.*

Definicja 2.5 *Niech* $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^2$*,* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *będzie punktem skupienia zbioru* A*,* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *(mamy przestrzenie metryczne* $\mathcal{E}^2$ *i* $\mathcal{E}^1$*) dowolną funkcją.*

Granicami iterowanymi funkcji f *w punkcie* (x_0, y_0) *nazywamy granice*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \quad \text{oraz} \quad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right), \tag{2.10}$$

o ile granice te mają sens tzn. przy ustalonej jednej zmiennej punkt będący jedną ze współrzędnych punktu (x_0, y_0) *jest punktem skupienia (oczywiście odpowiednią).*

Uwaga 2.8 *W pierwszej z tych granic w granicy wewnątrz funkcje* f *traktujemy jako funkcję argumentu* y *przy ustalonym (stałym) argumencie* x*. Analogicznie dla drugiej granicy iterowanej.*

Zauważmy ponadto, że $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ *(odpowiednio* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$*) jest już tylko funkcją* x *(odpowiednio* y*).*

Granicę $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ *nazywamy granicą podwójną.*

Uwaga 2.9 [2] *Interesującym jest związek granicy podwójną, a granicami iterowanymi. Przedstawimy go następnym twierdzeniu. Jednak wcześniej dla uproszczenia jego zapisów wprowadźmy dla* $A \subset \mathbb{R}^2$ *oznaczenia*

$$A'^1 \overset{\text{ozn}}{=} \{x \in \mathbb{R} : \exists_{y\in\mathbb{R}} (x,y) \in A\} \quad \text{oraz} \quad A'^2 \overset{\text{ozn}}{=} \{y \in \mathbb{R} : \exists_{x\in\mathbb{R}} (x,y) \in A\}.$$

Lemat 2.1 [3] *Niech* A *jest niepustą kulą otwartą w* $\mathbb{R}^2$*, a* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *będzie punktem skupienia zbioru* A*.*

Wtedy x_0 *jest punktem skupienia zbioru* A'^1*, a* y_0 *jest punktem skupienia zbioru* A'^2*.*

Twierdzenie 2.12 *Niech* A *będzie niepustą kulą otwartą*[4] *w* $\mathbb{R}^2$*,* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *będzie punktem skupienia zbioru* A*,* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *dowolną funkcją.*

Jeżeli funkcja f *posiada granicę podwójną w punkcie* (x_0, y_0) *oraz dla każdego* $x \in A'^1$ *funkcja* $f(x,\cdot)\colon A'^2 \to \mathbb{R}$ *posiada granicę w punkcie* y_0 *i każdego* $y \in A'^2$ *funkcja* $f(\cdot, y)\colon A'^1 \to \mathbb{R}$ *posiada granicę w punkcie* x_0*, to*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right).$$

Uwaga 2.10 *Ponieważ, jak już o tym wspominaliśmy* $(\mathbb{R}^l, +, \cdot, \mathbf{0})$*, gdzie* l *jest dowolną liczbą naturalną jest skończenie wymiarową przestrzenią wektorową więc można rozpatrywać bazę. My będziemy rozważać bazę standardową* $(\mathbf{e}_i)_{i\in\overline{1,l}}$ *zadaną wzorem*

$$(\mathbf{e}_i)_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}.$$

[2] Informacja podana na wykładzie w dniu 18.10.2007r.
[3] Informacja podana na wykładzie w dniu 18.10.2007r.
[4] Informacja podana na wykładzie w dniu 18.10.2007r.

Wykład 3

18.10.2007 (za 16.10.2007)

Ciągłość i jednostajna ciągłość funkcji.

Niech d będzie liczbą naturalną.

Uwaga 3.1 *Ponieważ definicję ciągłości funkcji w punkcie, funkcji ciągłej (na zbiorze), funkcji jednostajnie ciągłej na zbiorze, czy też spełniającej warunek Lipschitza wprowadziliśmy na I roku dla ogólnej przestrzeni metrycznej, więc pozostają słuszne dla $\mathcal{E}^d$.*

Sformułujemy teraz twierdzenia, które nie pojawiły się w zeszłym roku oraz twierdzenie ważne z pewnych powodów. Pierwsze z tych twierdzeń udowodnimy.

Uwaga 3.2 *Rozpatrujemy $\mathcal{E}^d$. Przed rozpatrywaniem własności funkcji ciągłych wprowadzimy pojęcie tzw. rzutu prostopadłego na i-tą oś układu (ewentualnie współrzędną), gdzie $i \in \overline{1,d}$.*

Definicja 3.1 *Niech $i \in \overline{1,d}$ będzie dowolne.*

Odwzorowanie $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $\pi_i(\mathbf{x}) = x_i$, gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, nazywamy rzutem na i-tą współrzędną.

Twierdzenie 3.1 *Niech $i \in \overline{1,d}$ będzie dowolne.*

Rzut na i-tą współrzędną jest odwzorowaniem Lipschitzowski ze stałą równą 1.

Wniosek 3.1 *Niech $i \in \overline{1,d}$ będzie dowolne.*

Rzut na i-tą współrzędną jest odwzorowaniem jednostajnie ciągłym, więc i ciągłym.

Niech r będzie liczbą naturalną większą od 1, G niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^r$, zaś $\mathbf{p}$ będzie punktem z $\mathbb{R}^r$.

Lemat 3.1 *Niech $i \in \overline{1,d}$ będzie dowolne, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ odwzorowaniem takim, że $f = (f_1, \ldots, f_d)$.*

Wtedy $\pi_i \circ f = f_i$.

Twierdzenie 3.2 *Niech $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ będzie dowolnym odwzorowaniem i $f = (f_1, \ldots, f_d)$, a $\mathbf{p}$ będzie punktem z G.*

Odwzorowanie f jest ciągłe w punkcie $\mathbf{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $i \in \overline{1,d}$ odwzorowanie f_i jest ciągłe w punkcie $\mathbf{p}$.

Uwaga 3.3 *Zauważmy, że ostatnie twierdzenie redukuje problem ciągłości odwzorowania $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ w punkcie tak, jak liczenia granicy w punkcie, do sprawdzania ciągłości składowych funkcji.*

Twierdzenie 3.3 *Niech $f, g\colon G \to \mathbb{R}^d$ będą dowolnymi odwzorowaniami.*

Jeżeli są one ciągłe (ciągłe w punkcie $\mathbf{p} \in G$), to ciągłe (odpowiednio ciągłe w punkcie $\mathbf{p}$) są funkcje $f+g$, $f-g$, $a \cdot f$ oraz $(f|g)$.

Twierdzenie 3.4 (Weierstrassa o obrazie ciągłym zbioru zwartego) *Niech G będzie zwartym podzbiorem $\mathcal{E}^r$, natomiast $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli f jest ciągłe, to zbiór $f(G)$ jest zwarty w $\mathcal{E}^d$.

Twierdzenie 3.5 (Weierstrassa o osiąganiu kresów przez funkcję ciągła) *Niech G będzie zwartym podzbiorem $\mathcal{E}^r$, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją i*

$$M \overset{\text{ozn}}{=} \sup_{\mathbf{x}\in G} f(\mathbf{x}) \quad \textit{oraz} \quad m \overset{\text{ozn}}{=} \inf_{\mathbf{x}\in G} f(\mathbf{x}). \tag{3.1}$$

Jeżeli f jest ciągła, to istnieją punkty $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in G$ takie, że $f(\mathbf{p}) = M$ i $f(\mathbf{q}) = m$.

Twierdzenie 3.6 (Cantora) *Niech G będzie zwartym podzbiorem $\mathcal{E}^r$, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ będzie dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli f jest ciągłe, to f jest odwzorowaniem jednostajnie ciągłym.

Uwaga 3.4 *Zmodyfikujemy obecnie definicję własności Darboux na na dowolną przestrzeń metryczną, a następnie dowiedziemy twierdzenia Darboux.*

Definicja 3.2 *Niech B będzie dowolnym niepustym podzbiorem zbioru G, $f\colon G \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją.*

Mówimy, że funkcja f ma własność Darboux na zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\mathbf{a},\mathbf{b}\in B}\forall_{c\in\mathbb{R}}\,(f(\mathbf{a}) < c < f(\mathbf{b}) \vee f(\mathbf{a}) > c > f(\mathbf{b})) \Rightarrow \exists_{\mathbf{x}\in B} f(\mathbf{x}) = c. \tag{3.2}$$

Twierdzenie 3.7 (Darboux – o przyjmowaniu wartości pośrednich) *Niech G będzie zbiorem spójnym w $\mathcal{E}^r$, $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli f jest ciągła, to f posiada własność Darboux na G.

Twierdzenie 3.8 (o zachowaniu znaku) *Niech G będzie otwartym zbiorem $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ dowolnym punktem z G, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli $f(\mathbf{p}) \neq 0$ oraz f jest ciągła w punkcie $\mathbf{p}$, to istnieje dodatnia liczba rzeczywista ρ taka, że $B(\mathbf{p}, \rho) \subseteq G$ oraz dla wszystkich punktów kuli $B(\mathbf{p}, \rho)$ funkcja f przyjmuje niezerowe wartości, które mają ten sam znak, co znak $f(\mathbf{p})$.

Uwaga 3.5 *Założenia ostatniego twierdzenia można osłabić – nie trzeba zakładać, że zbiór jest otwarty, ale wtedy teza jest prawdziwa dla punktów z części wspólnej kuli i zbioru A.*

Uwaga 3.6 *W przypadku funkcji o wartościach w $\mathbb{R}^d$ nie ma klasyfikacji punktów nieciągłości.*

Uwaga 3.7 *Twierdzenie o ciągłości funkcji odwrotnej (dziedzina przedział niezdegenerowny) wymaga dodatkowego założenia: można np. założyć, że funkcja, której odwrotna nas interesuje jest ciągła oraz że prowadzi ona ze zbioru otwartego położonego w przestrzeni d-wymiarowej w przestrzeń tego samego wymiaru d (jest to twierdzenie Brouwera o niezmienniczości obszaru). W tej wersji twierdzenie to jest prawdziwe, ale jego dowód znacznie wykracza poza ramy tego wykładu. Innym założeniem gwarantującym ciągłość funkcji odwrotnej jest zwartość jej dziedziny, co było udowodnione na wykładzie z Analizy Matematycznej na I roku.*

Odwzorowania liniowe z $\mathbb{R}^r$ w $\mathbb{R}^d$ i ich ciągłość.

Niech r i d będą liczbami naturalnymi.

Definicja 3.3 *Odwzorowanie $L\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d$ nazywamy liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ z $\mathbb{R}^r$ oraz dowolnej liczby rzeczywistej α spełnione są warunki*

$$L(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = L(\mathbf{x}) + L(\mathbf{y}). \tag{3.3}$$

$$L(\alpha\cdot\mathbf{x}) = \alpha\cdot L(\mathbf{x}). \tag{3.4}$$

Uwaga 3.8 *Zbiór wszystkich odwzorowań liniowych z $\mathbb{R}^r$ w $\mathbb{R}^d$ oznaczamy $L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$.*[1] *Jest to przestrzeń liniowa z działaniami określonymi następująco dla dowolnych $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r$, $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $L, L_1, L_2 \in L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$:*

$$(\alpha L)(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \alpha(L\mathbf{x}),$$
$$(L_1 + L_2)(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} L_1(\mathbf{x}) + L_2(\mathbf{x})$$

i elementem zerowym będącym przekształceniem zerowym.

Ponadto jest to przestrzeń unormowana, a nawet Banacha. Jednak o tych faktach powiemy na przyszłych wykładach.

[1] W ogólnej teorii zakłada się, że ten zbiór składa się odwzorowań liniowych, które są ciągłe lub równoważnie ograniczone.

Uwaga 3.9 *Wartość odwzorowania liniowego L w punkcie $\mathbf{x}$ oznaczamy $L\mathbf{x}$.*

Uwaga 3.10 *Odwzorowanie liniowe można utożsamić z macierzą (w pewnych bazach). W naszym wypadku rozpatrujemy* WYŁĄCZNIE *bazy standardowe.*

Twierdzenie 3.9 *Niech*

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \dots & a_{dr} \end{pmatrix}.$$

Wtedy dla dowolnego $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^r$ mamy

$$\|L\mathbf{x}\| \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2}\right)\|\mathbf{x}\|.$$

Twierdzenie 3.10 *Odwzorowanie liniowe jest odwzorowaniem Lipschitza ze stałą $\sqrt{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{r} a_{ij}^2}$, więc jest ciągłe.*

Różniczkowalność funkcji wielu zmiennych.

Niech r będzie liczbą naturalną większą od 1, d i l liczbami naturalnymi, G dowolnym niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^r$, zaś $\mathbf{p}$ będzie punktem z $\mathbb{R}^r$.

Definicja 3.4 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Odwzorowanie f jest różniczkowalne w punkcie $\mathbf{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $L \in L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$ takie, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - L\mathbf{h}}{\|h\|} = 0,$$

Wtedy przekształcenie liniowe L nazywamy pochodną[2] *odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$ i oznaczamy symbolem $Df(\mathbf{p})$ lub $f'(\mathbf{p})$.*

Jeżeli w każdym punkcie $\mathbf{x}$ zbioru G odwzorowanie f jest różniczkowalne, to mówimy, że jest to odwzorowanie różniczkowalne na zbiorze G.

Definicja 3.5 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem. Załóżmy, że f jest różniczkowalne na G. Odwzorowanie $Df\colon G \to L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$ nazywamy pochodną odwzorowania f.*

Uwaga 3.11

1. *Df oznacza się również f'.*
2. *Zauważmy, że tak naprawdę przy utożsamieniu pochodnej odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$ z macierzą $(a_{i,j})_{i\in\overline{1,d},j\in\overline{1,r}}$ w standardowych bazach, możemy myśleć o Df jako odwzorowaniu z G w $\mathbb{R}^{r\cdot d}$.*
3. *Niedługo się dowiemy, jak wyrazy macierzy $(a_{i,j})_{i\in\overline{1,d},j\in\overline{1,r}}$ reprezentującej pochodną odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$ związane są z odwzorowaniem f.*

Twierdzenie 3.11 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Odwzorowanie f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $L \in L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$ takie, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(\mathbf{p}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{p}) - L\mathbf{h}\|}{\|h\|} = 0.$$

Uwaga 3.12 *Zauważmy, że w liczniku i mianowniku funkcji pod granicą występują normy euklidesowe w różnych przestrzeniach euklidesowych, chociaż są tak samo oznaczane.*

[2] W niektórych podręcznikach odwzorowanie liniowe L nazywane jest różniczką odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$. My ten termin zarezerwujemy na odwzorowanie $\mathbb{R}^r \ni \mathbf{h} \mapsto f'(\mathbf{p})(\mathbf{h}) \in \mathbb{R}^d$. Należy jednak zaznaczyć, że przy rozpatrywaniu pojęcia różniczkowalności odwzorowań o dziedzinach i przeciwdziedzinach będących przestrzeniami Banacha (zobacz [2]) mówi się raczej o różniczce niż pochodnych.

Twierdzenie 3.12 (o jednoznaczności pochodnej) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$, to pochodna odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$ jest wyznaczona jednoznacznie.

Twierdzenie 3.13 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$, to jest w tym punkcie ciągła.

Twierdzenie 3.14 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem G, $f, g\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnymi odwzorowaniami, α dowolną liczbą rzeczywistą.*

Jeżeli f, g są różniczkowalne w punkcie $\mathbf{p}$, to różniczkowalne w punkcie $\mathbf{p}$ są odwzorowania $f+g$, $\alpha \cdot f$ oraz $f-g$. Ponadto
(i) $(f+g)'(\mathbf{p}) = f'(\mathbf{p}) + g'(\mathbf{p})$;
(ii) $(\alpha \cdot f)'(\mathbf{p}) = \alpha \cdot f'(\mathbf{p})$;
(iii) $(f-g)'(\mathbf{p}) = f'(\mathbf{p}) - g'(\mathbf{p})$.

Twierdzenie 3.15 (o pochodnej złożenia odwzorowań) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $f(G)$ zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^d$, $\mathbf{p}$ punktem G, $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ i $g\colon H \to \mathbb{R}^l$ będą dowolnymi odwzorowaniami.*

Jeżeli $f(G) \subset H$, f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ i g jest różniczkowalna w punkcie $f(\mathbf{p})$, to $g \circ f$ jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ oraz $(g \circ f)'(\mathbf{p}) = g'(f(\mathbf{p})) \circ f'(\mathbf{p})$.

Wykład 4

23.10.2007

Niech r będzie liczbą naturalną większą od 1, d liczbą naturalną, G dowolnym niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^r$, zaś $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ punktami $\mathbb{R}^r$.

Twierdzenie 4.1 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem G, zaś $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją przekształcenie liniowe $L \in L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$, dodatnia liczba ϵ i odwzorowanie $r\colon B(\mathbf{0}, \epsilon) \to \mathbb{R}^d$ takie, że dla dowolnego wektora $\mathbf{h}$ z $B(\mathbf{0}, \epsilon)$ zachodzi równość $f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + L\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\| r(\mathbf{h})$ i $r(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ oraz funkcja r jest ciągła w $\mathbf{0}$.[1]

Twierdzenie 4.2 (o pochodnej funkcji odwrotnej) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem G, zaś $f\colon G \to \mathbb{R}^r$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli odwzorowanie f jest różnowartościowe na G i różniczkowalne w punkcie $\mathbf{p}$, $f(G)$ jest zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, pochodna odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$ jest izomorfizmem oraz odwzorowanie odwrotne $f^{-1}\colon f(G) \to \mathbb{R}^r$ jest ciągłe w punkcie $f(\mathbf{p})$, to wtedy f^{-1} jest różniczkowalne w punkcie $f(\mathbf{p})$ i zachodzi równość

$$(f^{-1})'(f(\mathbf{p})) = (f'(\mathbf{p}))^{-1}.$$

Twierdzenie 4.3 (Lagrange'a o wartości średniej) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ punktami z G takimi, że $[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \subset G$, zaś $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na zbiorze G, to istnieje liczba rzeczywista Θ z odcinak otwartego $]0, 1[$ taka, że

$$f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q}) = f'(\mathbf{q} + \Theta(\mathbf{p} - \mathbf{q}))(\mathbf{p} - \mathbf{q}).$$

Twierdzenie 4.4 *Niech G będzie obszarem w $\mathcal{E}^r$, zaś $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na zbiorze G i jej pochodna jest stale równa zeru, to f jest funkcją stałą.

Twierdzenie 4.5

(i) *Niech G będzie otwartym podzbiorem w $\mathcal{E}^r$. Jeżeli odwzorowanie $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ jest odwzorowaniem stałym, to jest różniczkowalna na zbiorze G oraz $f'(\mathbf{p}) = 0$ dla dowolnego $\mathbf{p}$ z G.*

(ii) *Jeżeli $A\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^d$ jest odwzorowaniem liniowy, to A jest różniczkowalna na $\mathbb{R}^r$ oraz $DA = A$.*

(iii) *Niech G będzie otwartym podzbiorem w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem G, zaś odwzorowanie $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ ma składowe (współrzędne) $(f_1, \ldots, f_d)$. Odwzorowanie jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $i \in \overline{1, d}$ funkcje f_i są różniczkowalne w punkcie $\mathbf{p}$. Ponadto wtedy zachodzi równość*

$$f'(p) = (f_1'(p), \ldots, f_d'(p)).$$

Uwaga 4.1 *Zauważmy, że tak jak dla granicy i ciągłości problem różniczkowalności odwzorowań o wartościach $\mathbb{R}^d$ redukuje się do różniczkowalności funkcji o wartościach rzeczywistych.*

[1] Kula $B(\mathbf{0}, \epsilon)$ jest kulą w $\mathcal{E}^r$.

Pochodne cząstkowe.

Definicja 4.1 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $(\mathbf{e}_i)_{i\in\overline{1,r}}$ bazą standardową w $\mathbb{R}^r$, a $f\colon G\to\mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f ze względu na zmienną x_i, gdzie $i\in\overline{1,r}$, w punkcie $\mathbf{p}\in G$, nazywamy granicę

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{p}+h\cdot\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{p})}{h},$$

o ile ta granica istnieje. Tę pochodną cząstkową oznaczamy symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})$.

Uwaga 4.2 *Tak naprawdę o pojęciu pochodnej cząstkowej można by było mówić dla odwzorowania $f\colon G\to\mathbb{R}^d$. Wtedy granica byłaby wektorem, czyli mielibyśmy równość*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\mathbf{p}),\ldots,\frac{\partial f_d}{\partial x_i}(\mathbf{p})\right).$$

Uwaga 4.3 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem z G, zaś $f\colon G\to\mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli $f\equiv(f_1,\ldots,f_d)$ jest różniczkowalne w punkcie $\mathbf{p}$, to możemy utworzyć macierz pochodnych cząstkowych składowych następująco:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r}(\mathbf{p})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_r}(\mathbf{p})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_d}{\partial x_1}(\mathbf{p}) & \cdots & \frac{\partial f_d}{\partial x_r}(\mathbf{p})\end{pmatrix}.$$

Nazywamy ją macierzą Jacobiego odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$.

Jeżeli $d=r$, to możemy policzyć jej wyznacznik, który nazywa się jakobianem. Jakobian oznaczamy

$$\frac{D(f_1,\ldots,f_r)}{D(x_1,\ldots,x_r)}.$$

Uwaga 4.4 *Zauważmy, że dla pochodnych cząstkowych słuszne są wszystkie działania arytmetyczne (dodawanie, mnożenie, dzielenie, odejmowanie, mnożenie przez liczbę) te same jak dla pochodnej funkcji rzeczywistej.*

Twierdzenie 4.6 (warunek konieczny różniczkowalności) *Niech G będzie otwartym podzbiorem w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem z G, $f\colon G\to\mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$, to dla dowolnego $i\in\overline{1,r}$ pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})$ istnieją oraz

$$f'(\mathbf{p})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})\right)_i.$$

Twierdzenie 4.7 (warunek dostateczny różniczkowalności) *Niech G będzie otwartym podzbiorem w $\mathcal{E}^r$, $f\colon G\to\mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli dla pewnej dodatniej liczby rzeczywistej ϵ funkcja f ma pochodne cząstkowe względem wszystkich zmiennych w każdym punkcie pewnej kuli otwartej $B(\mathbf{p},\epsilon)$ i wszystkie one są ciągłe w punkcie $\mathbf{p}$, to funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ i zachodzi następujący wzór

$$f'(\mathbf{p})\mathbf{h}=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{p})h_i.$$

Twierdzenie 4.8 (reguła łańcucha (wniosek z twierdzenia o pochodnej złożenia odwzorowań)) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ będzie punktem tego zbioru.*

Jeżeli funkcje $g_1,\ldots,g_m\colon G\to\mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $\mathbf{p}$, a funkcja $f\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $(g_1(\mathbf{p}),\ldots,g_m(\mathbf{p}))$, to wówczas dla funkcji $f\circ(g_1,\ldots,g_m)\colon G\to\mathbb{R}$ i dla dowolnego $i\in\overline{1,r}$ mamy

$$\frac{\partial(f\circ(g_1,\ldots,g_m))}{\partial x_i}(\mathbf{p})=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial y_k}(g_1(\mathbf{p}),\ldots,g_m(\mathbf{p}))\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(\mathbf{p}).$$

Wniosek 4.1 *Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $a<b$, $\gamma\colon\,]a,b[\to\mathbb{R}^d$ dowolną krzywą, a $f\colon\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli γ jest różniczkowalna na $]a,b[$ oraz f jest funkcją różniczkowalna w każdym punkcie $\gamma(]a,b[)$, to

$$(g\circ\gamma)'(t)=\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\gamma(t))\gamma_k'(t).$$

Wykład 5

30.10.2007

Niech r będzie liczbą naturalną większą od 1, d liczbą naturalną, G dowolnym niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^r$, zaś $\mathbf{p}$ będzie punktem z $\mathbb{R}^r$.

Pochodna kierunkowa

Uwaga 5.1 *Pochodne cząstkowe można uogólnić otrzymując tzw. pochodne kierunkowe.*

Definicja 5.1 *Niech $\mathbf{v}$ będzie wektorem niezerowym z $\mathbb{R}^r$, G zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem tego zbioru, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$ w kierunku wektora $\mathbf{v}$ nazywamy granicę

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{p}+t\cdot\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{t},$$

o ile ta granica istnieje. Oznaczamy ją symbolem $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$.

Wniosek 5.1 *Niech G zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem tego zbioru, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Pochodna cząstkowa rzędu pierwszego względem zmiennej x_i w punkcie $\mathbf{p}$ funkcji f jest pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$ w kierunku wektora $\mathbf{e}_i$, o ile taka pochodna cząstkowa istnieje.

Uwaga 5.2 *Zauważmy, że można też mówić o pochodnej kierunkowej w kierunku wektora $\mathbf{v}$ w punkcie $\mathbf{p}$ dla odwzorowania $f\colon G \to \mathbb{R}^d$. Otrzymujemy wtedy wektor z $\mathbb{R}^d$, którego składowymi są pochodne kierunkowe składowych odwzorowania f w kierunku wektora $\mathbf{v}$ w punkcie $\mathbf{p}$.*

Uwaga 5.3 *Również warunek konieczny dla różniczkowalności można wyrazić za pomocą pochodnych kierunkowych.*

Twierdzenie 5.1 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem z G, $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$, to dla dowolnego dowolnego niezerowego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^r$ pochodna kierunkowa funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$ w kierunku wektora $\mathbf{v}$ istnieje oraz zachodzi równość

$$f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = f'(\mathbf{p})\mathbf{v}.$$

Definicja 5.2 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, a punkt $\mathbf{p}$ punktem tego zbioru, $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeśli f jest funkcją różniczkowalną w $\mathbf{p}$, to gradientem funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$ nazywamy taki wektor z $\mathbb{R}^r$ oznaczany $\operatorname{grad} f(\mathbf{p})$, *że dla każdego wektora $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^r$ zachodzi równość*

$$f'(\mathbf{p})\mathbf{h} = (\operatorname{grad} f(\mathbf{p})|\mathbf{h}).$$

Uwaga 5.4 *Gradient funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$ oznacza się również $\nabla f(\mathbf{p})$.*

Uwaga 5.5 *Zauważmy, że*

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{p}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_r}(\mathbf{p})\right]$$

Twierdzenie 5.2 (o kierunku najszybszego wzrostu funkcji) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem tego zbioru, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalną w $\mathbf{p}$ oraz $\nabla f(\mathbf{p}) \neq \mathbf{0}$, to pochodna funkcji f w kierunku gradientu funkcji w danym punkcie $\mathbf{p}$ jest największą spośród wszystkich pochodnych kierunkowych w tym punkcie w kierunku wektorów o długości $\|\nabla f(\mathbf{p})\|$.

Pochodna cząstkowe wyższych rzędów

Definicja 5.3 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ będzie punktem zbioru G, $i, j \in \overline{1,r}$ oraz $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Niech w każdym punkcie $\mathbf{x}$ zbioru G istnieje $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$. Otrzymujemy odwzorowanie

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon G \to \mathbb{R}$$

Jeżeli dla tej funkcji istnieje pochodna cząstkowa rzędu pierwszego względem zmiennej x_j tzn. $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(\mathbf{p})$, to nazywamy ją pochodną cząstkową rzędu drugiego funkcji f względem zmiennych x_j i x_i w punkcie $\mathbf{p}$ i oznaczamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{p}).$$

Jeżeli $i \neq j$, to pochodną cząstkową rzędu drugiego funkcji f względem zmiennych x_j i x_i w punkcie $\mathbf{p}$ nazywamy pochodną mieszaną rzędu drugiego funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$.

Uwaga 5.6 *Można mówić o pochodnych cząstkowych rzędu dwa dla odwzorowań $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ (porównaj uwagi 4.2 i 5.2).*

Twierdzenie 5.3 (Schwarza o pochodnych mieszanych) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem zbioru G, $i, j \in \overline{1,r}$ takim, że $i \neq j$, $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli pochodne mieszane $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ istnieją na zbiorze otwartym zawierającym punkt $\mathbf{p}$ i są ciągłe w punkcie $\mathbf{p}$, to

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{p}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p}).$$

Uwaga 5.7 *Twierdzenie Schwarza jest prawdziwe przy ogólniejszych założeniach, a mianowicie:*

1. *pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ istnieją w pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{p}$;*
2. *pochodna cząstkowa $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ jest ciągła w punkcie $\mathbf{p}$.*

Oczywiście do tezy należy dołączyć warunek, że $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{p})$ istnieje.

Wniosek 5.2 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem zbioru G, $i, j \in \overline{1,r}$ takim, że $i \neq j$, $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli pochodne mieszane $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ istnieją na zbiorze otwartym zawierającym punkt $\mathbf{p}$, ale nie są równe w punkcie $\mathbf{p}$, to co najmniej jedna z nich nie jest ciągła w punkcie $\mathbf{p}$.

Uwaga 5.8 *Tak jak dla funkcji rzeczywistych możemy określić pochodne cząstkowe wyższych rzędów.*

Przyjmiemy oznaczenie

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$$

na pochodną cząstkową rzędu k względem zmiennych $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, gdzie $i_s \in \overline{1,r}, s \in \overline{1,k}$ (różniczkujemy funkcję względem zmiennych w kolejności od prawa do lewa jak te zmienne zapisujemy).

Dla uproszczenia zapisów bardzo często przyjmuje się następujące oznaczenie

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_r^{\alpha_r}},$$

gdzie $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ jest wielowskaźnikiem (α_i są liczbami całkowitymi nieujemnymi), a $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_r$ oraz gdy α_i równe jest zero, to brak różniczkowania po zmiennej x_i, a gdy $\alpha_i \geqslant 1$ to mamy α_i razy różniczkowanie po zmiennej x_i.

Definicja 5.4 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, k dowolną liczbą naturalną, $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Mówimy, że funkcja f jest klasy $C^{(k)}$ na zbiorze G (zapisujemy $f \in C^{(k)}(G)$) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej pochodne cząstkowe do rzędu k włącznie są określone i ciągłe na tym zbiorze.

Mówimy, że funkcja f jest klasy $C^{(\infty)}$ na zbiorze G (zapisujemy $f \in C^{(\infty)}(G)$) wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej pochodne cząstkowe dowolnego rzędu są określone i ciągłe na tym zbiorze tzn

$$C^{(\infty)}(G) = \bigcap_{m=1}^{\infty} C^{(m)}(G).$$

Uwaga 5.9 *W przypadku funkcji z $C^{(2)}(G)$ otrzymujemy równość ich pochodnych mieszanych.*

Wniosek 5.3 (Schwarza) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, k dowolną liczbą naturalną, $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli funkcja f jest klasy $C^{(k)}$ na zbiorze G, to wartości jej pochodnych cząstkowych $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}$ nie zależą o porządku różniczkowania.

Funkcje jednorodne

Definicja 5.5 *Niech $G = \mathbb{R}^r$ bądź $G = \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ i $f\colon G \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją, p liczba całkowitą nieujemną.*

Mówimy, że f jest funkcja jednorodną stopnia p wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \forall_{\mathbf{x}\in G} f(t\mathbf{x}) = t^p f(\mathbf{x}). \tag{5.1}$$

Jeżeli warunek (5.1) jest prawdziwy tylko dla liczb dodatnich t, to mówimy, że f jest dodatni jednorodna stopnia p.

Twierdzenie 5.4 (Eulera) *Niech $G = \mathbb{R}^r$ bądź $G = \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$ i $f\colon G \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją, p liczba całkowitą nieujemną.*

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna na G i jest funkcja dodatni jednorodną stopnia p,

$$\forall_{\mathbf{x}\in G} p f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{r} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}).$$

Wykład 6

06.11.2007

Niech r będzie liczbą naturalną większą od 1, d liczbą naturalną, G dowolnym niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^r$, zaś $\mathbf{p}$ będzie punktem $\mathbb{R}^r$.

Uwaga 6.1 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli f jest różniczkowalna na G, to o pochodnej Df możemy myśleć jako o odwzorowaniu z G w $\mathbb{R}^{r\cdot d}$ (składowe takiego odwzorowania, to pochodne cząstkowe składowych f). Możemy więc skorzystać z pojęcia różniczkowalności i mówić różniczkowalności takiego odwzorowania w punkcie $\mathbf{p}$ zbioru G. Tak definiujemy drugą pochodną odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$. Drugą pochodną odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$ oznaczamy $f''(\mathbf{p})$ bądź $D^2f(\mathbf{p})$. Indukcyjnie określamy n-tą pochodną odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$, którą oznaczać będziemy $D^nf(\mathbf{p})$, przyjmując, że $D^{n+1}f(\mathbf{p}) = D(D^nf)(\mathbf{p})$.

Takie spojrzenie na pochodną pozwala obejść trudności przy definiowaniu pochodnych wyższych rzędów. Innym podejściem jest rozważenie tylko składowych pochodnej Df. Jednak i to nie jest nie jest najlepsze. Tak naprawdę trzeba by było definiować od razu różniczkowalność odwzorowań z przestrzeni Banacha w przestrzeń Banacha. Nie ma wtedy problemu z określeniem pochodnych wyższych rzędów. Przy tym spojrzeniu $D^nf(\mathbf{p})$ jest odwzorowaniem klasy $L(\mathbb{R}^r, L(\mathbb{R}^r, \ldots L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)\ldots))$.

Inna charakteryzacja funkcji klasy $C^{(m)}$.

Uwaga 6.2 *Zgodnie z uwaga 3.8 przestrzeń $L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$ jest przestrzenią unormowaną i Banacha. Udowodnimy ten fakt. Pozwoli to nam scharakteryzować inaczej klasy $C^{(m)}$. Jednak na początku sformułujemy potrzebne twierdzenia i definicję. Należy podkreślić, że niektórych dowodów na wykładzie nie przedstawiamy.*

Definicja 6.1 *Mówimy, że $L \in L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$ jest ograniczone wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists_{M>0}\forall_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^r}\|L\mathbf{x}\| \leqslant M\|\mathbf{x}\|.$$

Uwaga 6.3 *Niech $L \in L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$ będzie dowolne. Wtedy zgodnie z twierdzeniami 3.9, 3.10 L jest ono ograniczone i ciągłe.*

Definicja 6.2 *Niech $L \in L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$. Normę odwzorowania L (oznaczaną $\|L\|$) definiujemy jako*

$$\inf\{A > 0 : \forall_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^r}\|L\mathbf{x}\| \leqslant A\|\mathbf{x}\|\}.$$

Lemat 6.1 *Niech $L \in L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$. Wtedy*

$$\|L\| = \sup\{\|L\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r \wedge \|\mathbf{x}\| \leqslant 1\}.$$

Lemat 6.2 $(L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$ *jest przestrzenią Banacha.*

Twierdzenie 6.1 (warunek równoważny przynależności do klasy $C^{(1)}$) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Funkcja f jest klasy $C^{(1)}$ na G wtedy i tylko wtedy, gdy jest różniczkowalna i jej pochodna $Df\colon G \to L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)$ jest odwzorowaniem ciągłym.

Uwaga 6.4 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Zauważmy, że jeżeli f jest klasy $C^{(2)}$ na G, to druga pochodna jest odwzorowaniem z G w $L(\mathbb{R}^r, L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d))$. Ponadto przestrzeń $L(\mathbb{R}^r, L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d))$ jest izometrycznie izomorficzna przestrzeni $L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r; \mathbb{R}^d)$ form dwuliniowych.

Natomiast, gdy f jest klasy $C^{(m)}$ na G, to m-ta pochodna jest odwzorowaniem $L(\mathbb{R}^r, L(\mathbb{R}^r, \ldots L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^d)\ldots))$ ($\mathbb{R}^r$ występuje dokładnie m razy).

Uwaga 6.5 *Korzystając z pojęcia odwzorowania wieloliniowego (m-liniowego) możemy stwierdzić, że m-ta pochodna jest odwzorowaniem m-liniowym.*

Uwaga 6.6 *W przypadku zbioru G otwartego w $\mathcal{E}^r$, punktu $\mathbf{p}$ tego zbioru i funkcji $f\colon G \to \mathbb{R}$ klasy $C^{(2)}$ na G, druga pochodna f w punkcie $\mathbf{p}$ reprezentuje się przez macierz*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{p}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_r}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{p}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_r}(\mathbf{p}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_1}(\mathbf{p}) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_r^2}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}.$$

Macierz tą nazywamy macierzą Hessego albo hesjanem funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$.

Twierdzenie Taylora

Uwaga 6.7 *Jeżeli $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^r$ oraz α jest wielowskaźnikiem, to*

$$\mathbf{h}^\alpha \overset{\text{ozn}}{=} h_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot h_r^{\alpha_r}.$$

Definicja 6.3 *Niech n będzie liczbą naturalną, G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem tego zbioru, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Załóżmy, że f jest klasy $C^{(n)}(G)$. Przyjmijmy dla $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^r$ następujące oznaczenie

$$D^n f(\mathbf{p})\mathbf{h} \overset{\text{ozn}}{=} \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_r!} \frac{\partial^n f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_r} x_r}(\mathbf{p})\mathbf{h}^\alpha.$$

Wtedy odwzorowanie

$$\mathbb{R}^r \ni \mathbf{h} \mapsto D^n f(\mathbf{p})\mathbf{h} \tag{6.1}$$

nazywamy n-różniczką funkcji f w punkcie $\mathbf{p}$.

Twierdzenie 6.2 (Taylora) *Niech $f\colon G \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją, $\mathbf{p}$ punktem zbioru G, a ρ dodatnią liczbą rzeczywistą taką, że $B(\mathbf{p}, \rho) \subset G$.*

Jeżeli f jest klasy $C^{(n)}(B(\mathbf{p}, \rho))$, to

$$\forall_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p},\rho)} \exists_{\Theta \in]0,1[} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} D^i f(\mathbf{p})(\mathbf{x}-\mathbf{p}) + \frac{1}{n!} D^n f(\mathbf{p} + \Theta(\mathbf{x}-\mathbf{p}))(\mathbf{x}-\mathbf{p}). \tag{6.2}$$

Uwaga 6.8 *Wyrażenie $\frac{1}{n!} D^n f(\mathbf{p} + \Theta(\mathbf{x}-\mathbf{p}))(\mathbf{x}-\mathbf{p})$ nazywamy resztą w postaci Lagrange'a.*

Uwaga 6.9 *Twierdzenie Taylora można również sformułować zadając resztę w postaci całkowej, bądź w postaci Peano. Dla formalności sformułujemy tezę również dla tych reszt.*

Teza twierdzenia Taylora z resztą całkową:

$$\forall_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p},\rho)} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} D^i f(\mathbf{p})(\mathbf{x}-\mathbf{p}) + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n D^n f(\mathbf{p} + t(\mathbf{x}-\mathbf{p}))dt. \tag{6.3}$$

Teza twierdzenia Taylora z resztą Peano:

$$\forall_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{p},\rho)} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!} D^i f(\mathbf{p})(\mathbf{x}-\mathbf{p}) + o(\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^n), \tag{6.4}$$

gdzie symbol $o(\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^n)$ oznacza, że

$$\lim_{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\| \to 0} \frac{o(\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^n)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{p}\|^n} = 0.$$

Uwaga 6.10 *Twierdzenie Taylora dla odwzorowań z otwartego podzbioru $\mathcal{E}^r$ w $\mathcal{E}^d$ przedstawimy w uzupełnieniu, po zakończeniu część wykładu dotyczącego różniczkowania funkcji wielu zmiennych.*

Odwzorowania zwężające

Definicja 6.4 *Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną i $F\colon X \to X$ dowolnym odwzorowaniem.*

Mówimy, że F jest kontrakcją (odwzorowaniem zwężającym) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba L z odcinka $[0, 1[$ taka, że

$$\forall_{x,y \in X}\, \rho(F(x), F(y)) \leqslant L\rho(x, y).$$

Uwaga 6.11 *Zauważmy, że kontrakcja jest odwzorowaniem spełniającym warunek Lipschitza.*

Twierdzenie 6.3 (Banacha o kontrakcji) *Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną zupełną, a $F\colon X \to X$ będzie dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli F jest kontrakcją, to istnieje dokładnie jeden punkt stały tego odwzorowania tzn. istnieje dokładnie jeden punkt x z X taki, że $F(x) = x$.

Wykład 7

20.11.2007

Odwzorowania zwężające c.d.

Twierdzenie 7.1 (o ciągłej zależności punktu stałego) *Niech (X, ρ) będzie ustaloną przestrzenią metryczną zupełną, $F, G\colon X \to X$ dowolnymi odwzorowaniami, a ϵ dowolną liczbą dodatnią.*

Jeżeli F będzie kontrakcją ze stałą równą L, p jest punktem stałym F, q punktem stałym G oraz G spełnia warunek

$$\forall_{x \in X} \rho(F(x), G(x)) \leqslant \epsilon,$$

to $\rho(p, q) \leqslant \frac{\epsilon}{1-L}$.

Twierdzenie o funkcji niejawnej i odwzorowaniu odwrotnym

Niech r będzie liczbą naturalną większą od 1, G będzie dowolnym niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^r$, zaś $\mathbf{p}$ będzie punktem z $\mathbb{R}^r$.

Twierdzenie 7.2 (o odwracaniu odwzorowania) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ będzie punktem zbioru G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^r$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli odwzorowanie $f'\colon G \to L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^r)$ jest ciągłe i dla punktu $\mathbf{p}$ różniczka $f'(\mathbf{p})$ jest izomorfizmem, to istnieje niepusty zbiór $U \subset G$ otwarty w $\mathcal{E}^r$ taki, że

(i) $\mathbf{p} \in U$ i $f(U)$ jest otwartym podzbiorem w $\mathcal{E}^r$,

(ii) f jest odwzorowaniem różnowartościowym na U,

(iii) odwzorowanie $(f|_U)^{-1}\colon f(U) \to U$ jest różniczkowalna i jej pochodne cząstkowe są ciągłe w punktach zbioru $f(U)$.

Wniosek 7.1 (o lokalnej różnowartościowości odwzorowania) *Niech G będzie obszarem w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem z G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^r$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli f jest różniczkowalne na G, pochodne cząstkowe są ciągłe w punkcie $\mathbf{p}$ oraz macierz Jacobiego odwzorowania f w punkcie $\mathbf{p}$ jest nieosobliwa, to istnieje $U \subset G$ zbiór U otwarty w $\mathcal{E}^r$ zawierający punkt $\mathbf{p}$ taki, że $f|_U$ jest odwzorowaniem różnowartościowym.

Definicja 7.1 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, a $f\colon G \to \mathbb{R}^r$ dowolnym odwzorowaniem.*

Mówimy, że odwzorowanie f jest dyfeomorfizmem klasy C^1 (odpowiednio klasy C^k, gdzie k jest liczbą naturalną) wtedy i tylko wtedy, gdy $f(G)$ zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, f jest różnowartościowe oraz f i f^{-1} są klasy $C^{(1)}$ ($C^{(k)}$) odpowiednio na G i $f(G)$.

Uwaga 7.1 *Można byłoby mówić o dyfeomorfizme klasy C^0. Jednak w tym wypadku oznaczałoby to tylko ciągłość.*

Twierdzenie 7.3 (o odwzorowaniu uwikłanym) *Niech k,l będą liczbami naturalnymi, O będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^{k+l}$ otwartym w $\mathcal{E}^{k+l}$, $\mathbf{p}$ punktem $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{q}$ punktem $\mathbb{R}^l$, a $f\colon O \to \mathbb{R}^l$ dowolnym odwzorowaniem (odwzorowanie f będziemy traktować jako odwzorowanie pary zmiennych $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ oraz $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$).*

Jeżeli f jest klasy $C^{(1)}$ na O, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in O$, $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{0}$ oraz macierz $\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\right)_{i,j \in \overline{1,l}}$ jest nieosobliwa, to istnieją otoczenia otwarte U punktu $\mathbf{p}$ w $\mathcal{E}^k$ i V punktu $\mathbf{q}$ w $\mathcal{E}^l$ takie, że dla każdego $\mathbf{x} \in U$ istnieje dokładnie jedno $\mathbf{y} \in V$, dla którego $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Ponadto odwzorowanie $g\colon U \to V$ zadane warunkiem $f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$ jest klasy $C^{(1)}$ na U.

Uwaga 7.2 *Istnieją dwa podejścia do dowodu twierdzenia o odwzorowaniu uwikłanym. Jedno z nich to bezpośrednio z twierdzenia o odwracaniu odwzorowania, a drugie bezpośrednio z twierdzenia Banacha o odwzorowaniu zwężającym. Drugie z tych podejść jest wykorzystywane w sytuacji, gdy dowodzimy twierdzenia o odwracaniu odwzorowania w oparciu o twierdzenie o odwzorowaniu uwikłanym.*

Niezależność funkcyjna.

Definicja 7.2 *Niech G będzie obszarem w $\mathcal{E}^r$, n liczbą naturalną większą od jedynki, a $f_i\colon G \to \mathbb{R}$ dowolnymi funkcjami, gdzie $i \in \overline{1,n}$.*

Mówimy, że układ funkcji $f_1, \dots, f_n$ jest funkcyjnie zależny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nietożsamościowo równa stałej taka, że dla dowolnego $\mathbf{x} \in G$ zachodzi równość

$$H(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})) = const.$$

Jeżeli taka funkcja nie istnieje to mówimy, że układ funkcji $f_1, \dots, f_n$ jest funkcyjnie niezależny.

Twierdzenie 7.4 (o funkcyjnej niezależności) *Niech r liczbą naturalną większą od jedynki, G będzie obszarem w $\mathcal{E}^r$, a $f_i\colon G \to \mathbb{R}$ dowolnymi funkcjami, gdzie $i \in \overline{1,r}$. Przyjmijmy $f \overset{\text{ozn}}{=} (f_1, \dots, f_r)$*

Jeżeli funkcje $f_1, \dots, f_r$ są różniczkowalne na G oraz macierz Jacobiego odwzorowania f w każdym punkcie G jest nieosobliwa, to układ funkcji $f_1, \dots, f_r$ jest funkcyjnie niezależny.

Analiza ekstremów

Definicja 7.3 *Niech $\mathbf{p}$ będzie punktem zbioru G, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ maksimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie $\mathcal{O}_\mathbf{p}$ punktu $\mathbf{p}$ takie, że $\mathcal{O}_\mathbf{p} \subset G$ oraz dla dowolnego punktu $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\mathbf{p}$ jest $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{p})$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ minimum lokalne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie $\mathcal{O}_\mathbf{p}$ punktu $\mathbf{p}$ takie, że $\mathcal{O}_\mathbf{p} \subset G$ oraz dla dowolnego punktu $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\mathbf{p}$ jest $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{p})$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ maksimum lokalne właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie $\mathcal{O}_\mathbf{p}$ punktu $\mathbf{p}$ takie, że $\mathcal{O}_\mathbf{p} \subset G$ oraz dla dowolnego punktu $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\mathbf{p} \setminus \{p\}$ jest $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{p})$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ minimum lokalne właściwe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie $\mathcal{O}_\mathbf{p}$ punktu $\mathbf{p}$ takie, że $\mathcal{O}_\mathbf{p} \subset G$ oraz dla dowolnego punktu $\mathbf{x} \in \mathcal{O}_\mathbf{p} \setminus \{p\}$ jest $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{p})$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ ekstremum lokalne (właściwe) wtedy i tylko wtedy, gdy ma w punkcie $\mathbf{p}$ minimum lokalne (właściwe) bądź maksimum lokalne (właściwe).

Uwaga 7.3 *Zauważmy, że aby mówić o ekstremum lokalnym w jakimś punkcie dziedziny punkt ten musi być punktem wewnętrznym tej dziedziny.*

Wykład 8

22.11.2007 (za 13.11.2007)

Niech r będzie liczbą naturalną większą od 1, G będzie dowolnym niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^r$, zaś $\mathbf{p}$ będzie punktem z $\mathbb{R}^r$.

Analiza ekstremów c.d.

Definicja 8.1 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ będzie punktem zbioru G, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ maksimum globalne wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\mathbf{p}) = \sup\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in G\}$.

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ minimum globalne wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\mathbf{p}) = \inf\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in G\}$.

Twierdzenie 8.1 (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ będzie punktem zbioru G, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ lokalne ekstremum (minimum lub maksimum) i ma pochodną kierunkową $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p})$ w kierunku wektora $\mathbf{v}$, to $f'_{\mathbf{v}}(\mathbf{p}) = 0$.

Jeżeli funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ lokalne ekstremum i jest różniczkowalna w punkcie, to $\nabla f(\mathbf{p}) = 0$.

Definicja 8.2 *Mówmy, że macierz $A = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,k}}$ jest macierzą symetryczną wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $i, j \in \overline{1,k}$ mamy $a_{ij} = a_{ji}$.*

Niech macierz $A = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,k}}$ będzie macierzą symetryczną. Mówimy, że forma kwadratowa f jest zadana przez A wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ mamy

$$f(\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}x_i x_j.$$

Niech macierz $A = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,k}}$ będzie macierzą symetryczną, a f formą kwadratową zadana przez A. Mówimy, że forma kwadratowa jest dodatnio (ujemnie) określona wtedy i tylko wtedy, gdy $f(\mathbf{x}) > 0$ ($f(\mathbf{x}) < 0$) dla dowolnego niezerowego $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^k$.

Formę kwadratową nazywamy nieokreśloną wtedy i tylko wtedy, gdy przyjmuje zarówno wartości dodatnie i ujemne. Jeżeli natomiast przyjmuje stale nieujemne bądź niedodatnie oraz zeruje się na wektorach niezerowych, to taką formę nazywamy półokreśloną.

Lemat 8.1 *Niech macierz A będzie macierzą symetryczną, f formą kwadratową wyznaczoną przez A, a g formą kwadratową wyznaczoną przez $-A$.*

Forma kwadratowa f jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy g jest ujemnie określona.

Lemat 8.2 *Niech macierz A będzie macierzą symetryczną, a f formą kwadratową wyznaczoną przez A, t rzeczywistą liczbą dodatnią.*

Wtedy

$$\inf\{f(\mathbf{x}) : \|\mathbf{x}\| = t\} > 0.$$

Twierdzenie 8.2 (Sylvestra o formach kwadratowych dodatnio określonych) *Niech macierz $A = (a_{ij})_{i,j\in\overline{1,k}}$ będzie macierzą symetryczną, a f formą kwadratową zadana przez A.*

Forma kwadratowa f jest dodatnio (ujemnie) określona wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej liczby naturalne $l \in \overline{1,k}$ mamy

$$\det(a_{ij})_{i,j\in\overline{1,l}} > 0 \quad (\textit{odpowiednio } (-1)^k \det(a_{ij})_{i,j\in\overline{1,l}} > 0).$$

Definicja 8.3 *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ będzie punktem zbioru G, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją, dla której istnieją pochodne cząstkowe w punkcie $\mathbf{p}$.*

Punkt $\mathbf{p}$ nazywamy stacjonarnym wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie pochodne cząstkowe w punkcie $\mathbf{p}$ równe są zero.

Twierdzenie 8.3 (warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ będzie punktem zbioru G, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Jeżeli funkcja f jest klasy $C^{(2)}$ na G i punkt $\mathbf{p}$ jest punktem stacjonarnym, to

(i) funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ minimum lokalne, o ile forma kwadratowa wyznaczona przez $D^2 f(\mathbf{p})$ jest dodatnio określona;

(ii) funkcja f ma w punkcie $\mathbf{p}$ maksimum lokalne, o ile forma kwadratowa wyznaczona przez $D^2 f(\mathbf{p})$ jest ujemnie określona;

(iii) funkcja f nie ma w punkcie $\mathbf{p}$ ekstremum lokalnego, o ile forma kwadratowa wyznaczona przez $D^2 f(\mathbf{p})$ jest nieokreślona określona.

Wykład 9

27.11.2007

Ekstrema warunkowe

Twierdzenie 9.1 (Lagrange'a o lokalnych ekstremach warunkowych) *Niech k,l będą liczbami naturalnymi, G_1 zbiorem niepustym i otwartym w $\mathcal{E}^k$, G_2 zbiorem niepustym i otwartym w $\mathcal{E}^l$, $\mathbf{p}$ punktem $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{q}$ punktem $\mathbb{R}^l$, a $F\colon G_1 \times G_2 \to \mathbb{R}^l$ dowolnym odwzorowaniem, a $f\colon G_1 \times G_2 \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją, gdzie F i f traktujemy jako odwzorowania pary zmiennych $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dla $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ oraz $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$.*

Niech F jest klasy $C^{(1)}$ na $G_1 \times G_2$, $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in G_1 \times G_2$, $F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$ oraz macierz $\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\right)_{i,j \in \overline{1,l}}$ jest nieosobliwa.

Jeżeli f jest różniczkowalna na $G_1 \times G_2$ oraz przyjmuje w punkcie $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ wartość najmniejszą lub największą spośród wartości przyjmowanych na zbiorze $\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0\}$, to istnieją liczby rzeczywiste $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ takie, że

$$\nabla f(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \lambda_1 \nabla F_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \ldots + \lambda_l \nabla F_l(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Uwaga 9.1 *Liczby rzeczywiste $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ w twierdzeniu Lagrange'a nazywamy mnożnikami Lagrange'a, natomiast funkcja $L\colon : G_1 \times G_2 \to \mathbb{R}$ daną wzorem*

$$L = f - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i F_i$$

nazywamy funkcją Lagrange'a.

Zastosowania

Niech r będzie liczbą naturalną większą od 1, G dowolnym niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^r$, zaś $\mathbf{p}, \mathbf{v}$ będą punktami z $\mathbb{R}^r$.

Definicja 9.1 *Niech $\mathbf{p}$ będzie dowolnym punktem G.*

Wektor $\mathbf{v}$ nazywamy wektorem stycznym do zbioru G w punkcie $\mathbf{p}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje nieujemna liczba rzeczywista t i ciąg $(\mathbf{p}_n) \subset G \setminus \{\mathbf{p}\}$ takie, że

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p} \quad \textit{oraz} \quad t\mathbf{v} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathbf{p}_n - \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}_n - \mathbf{p}\|}.$$

Zbiór wektorów stycznych do zbioru G w punkcie $\mathbf{p}$ oznaczamy symbolem $T_{\mathbf{p}}G$.

Uwaga 9.2 *W wielu podręcznikach przez wektor styczny do zbioru określane są, jako wektory styczne do krzywych zawartych w tych zbiorach tzn. zbiór wartości krzywych jest podzbiorem zbioru. Analogiczną definicję do tej (dokładniej równoważną) można znaleźć w podręczniku W. Kołodzieja [2].*

Uwaga 9.3 *$T_{\mathbf{p}}G$ nie musi, ale może być przestrzenią wektorową.*

Wniosek 9.1 *Niech $\mathbf{p}$ będzie dowolnym punktem G.*

Jeżeli istnieje wektor styczny do zbioru G w punkcie $\mathbf{p}$, to punkt $\mathbf{p}$ jest punktem skupienia zbioru G.

Wniosek 9.2 *Niech $\mathbf{p}$ będzie dowolnym punktem G, r dowolną liczbą rzeczywistą.*

Jeżeli $\mathbf{v}$ jest wektor styczny do zbioru G w punkcie $\mathbf{p}$, to $s\mathbf{v}$ jest też wektor styczny do zbioru G w punkcie $\mathbf{p}$.

Twierdzenie 9.2 *Niech* $\mathbf{p}$ *będzie dowolnym punktem* G, δ *liczbą dodatnią,* $\gamma\colon]-\delta,\delta[\to \mathbb{R}^r$ *krzywą.*

Jeżeli $\mathbf{p}$ *jest punktem skupienia zbioru* G, γ *krzywą różniczkowalną taką, że* $\gamma(t)\in G$ *dla* $t\in]0,\delta[$ *i* $\gamma(0)=\mathbf{p}$, *to wektor* $\gamma'(0)1$ *jest styczny do zbioru* G *w punkcie* $\mathbf{p}$.

Definicja 9.2 *Niech* G *będzie zbiorem otwartym w* $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ *będzie punktem zbioru* G, *a* $f\colon G\to\mathbb{R}$ *dowolną funkcją.*

Zbiór $\{\mathbf{x}\in G : f(\mathbf{x})=f(\mathbf{p})\}$ *nazywamy poziomicą funkcji* f *zawierającą punkt* $\mathbf{p}$.

Twierdzenie 9.3 (warunek konieczny styczności do poziomicy funkcji w punkcie) *Niech* G *będzie zbiorem otwartym w* $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ *punktem zbioru* G, $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, *a* $f\colon G\to\mathbb{R}$ *dowolną funkcją.*

Jeżeli funkcja f *jest różniczkowalna w punkcie* $\mathbf{p}$ *i wektor* $\mathbf{v}$ *jest styczny w punkcie* $\mathbf{p}$ *do poziomicy funkcji* f *zawierającej punkt* $\mathbf{p}$, *to* $f'(\mathbf{p})\mathbf{v}=0$, *a więc* $(\nabla f(\mathbf{p})|\mathbf{v})=0$.

Twierdzenie 9.4 (warunek dostateczny styczności do poziomicy funkcji w punkcie) *Niech* G *będzie zbiorem otwartym w* $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ *punktem zbioru* G, $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, *a* $f\colon G\to\mathbb{R}$ *dowolną funkcją.*

Jeżeli funkcja f *jest różniczkowalna w punkcie* $\mathbf{p}$, *ciągła w otoczeniu punktu* $\mathbf{p}$ *taką, że* $\nabla f(\mathbf{p})\neq\mathbf{0}$ *oraz* $0=f'(\mathbf{p})\mathbf{v}=(\nabla f(\mathbf{p})|\mathbf{v})=0$, *to wektor* $\mathbf{v}$ *jest styczny w punkcie* $\mathbf{p}$ *do poziomicy funkcji* f *zawierającej punkt* $\mathbf{p}$.

Wykład 10

04.12.2007

Niech r będzie liczbą naturalną, G dowolnym niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^r$, zaś $\mathbf{p}, \mathbf{v}$ punktami z $\mathbb{R}^r$.

Definicja 10.1 *Niech $\mathbf{p}$ będzie dowolnym punktem G. Załóżmy, że $T_{\mathbf{p}}G$ będzie podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^r$.*
Hiperpłaszczyzną styczną do zbioru G w punkcie $\mathbf{p}$ nazywamy zbiór

$$\{\mathbf{p} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in T_{\mathbf{p}}G\}$$

i oznaczamy $T^{\star}_{\mathbf{p}}G$.
W szczególności, gdy $T_{\mathbf{p}}G$ jest wymiaru jeden bądź dwa, to hiperpłaszczyzną $T^{\star}_{\mathbf{p}}G$ styczną do zbioru G w punkcie $\mathbf{p}$ jest nazywana styczną (prostą styczną) i płaszczyzną styczną do zbioru G w punkcie $\mathbf{p}$.

Rozmaitość zanurzona w przestrzeni euklidesowej

Niech k, l będą liczbami naturalnymi, $\mathcal{M}$ podzbiorem $\mathbb{R}^{k+l}$.

Definicja 10.2 *Niech G będzie otwartym podzbiorem $\mathcal{E}^k$, $f\colon G \to \mathbb{R}^l$ dowolnym odwzorowaniem.*
Zbiór $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in G\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ nazywamy wykresem odwzorowania f.

Definicja 10.3 *Zbiór $\mathcal{M}$ nazywamy k-wymiarową rozmaitością klasy C^1 zanurzoną w $\mathbb{R}^{k+l}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego punktu $\mathbf{p}$ z $\mathcal{M}$ istnieje otoczenie otwarte $\mathcal{O}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{R}^{k+l}$ punktu $\mathbf{p}$, liczby naturalne $i_1, i_2, \ldots, i_k$ i funkcje $\phi_{j_1}, \phi_{j_2}, \ldots, \phi_{j_l}$, klasy $C^{(1)}$ na $\mathcal{O}_{\mathbf{p}}$ zmiennych $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ takie, że zbiór $\mathcal{M} \cap \mathcal{O}_{\mathbf{p}}$ składa się z punktów, których współrzędne o numerach $i_1, i_2, \ldots, i_k$ są zmiennymi niezależnymi, natomiast pozostałe l współrzędnych to $\phi_{j_1}(i_1, i_2, \ldots, i_k), \ldots, \phi_{j_l}(i_1, i_2, \ldots, i_k)$.*

Uwaga 10.1

1. *W definicji rozmaitości zakładamy, że $\{i_1, i_2, \ldots, i_k, j_1, j_2, \ldots, j_l\} = \{1, 2, \ldots, k+l\}$. Wybór liczb $i_1, i_2, \ldots, i_k$ zależny jest na ogół od punktu $\mathbf{p}$. Liczby $j_1, i_2, \ldots, j_l$, to te spośród $1, 2, \ldots, k+l$, które pozostały po wybraniu $i_1, i_2, \ldots, i_k$.*

2. *Rozmaitości zanurzone w $\mathbb{R}^{k+l}$ nazywane są hiperpowierzchniami. Czasem ten termin zarezerwowany jest dla przypadku $l = 1$. Liczba l nazywana jest kowymiarem rozmaitości zanurzonej $\mathbb{R}^{k+l}$.*

3. *Często zamiast mówić rozmaitość zanurzona w $\mathbb{R}^{k+l}$ mówi się podrozmaitość $\mathbb{R}^{k+l}$.*

4. *Jeśli dla wszystkich punków zbioru $\mathcal{M}$ można wybrać jedno otoczenie $\mathcal{O}$ o którym jest mowa w definicji, to $\mathcal{M}$ nazywamy płatem k-wymiarowym w $\mathbb{R}^{k+l}$.*

5. *Zauważmy, że wykres odwzorowania $f\colon G \to \mathbb{R}^l$, gdzie G jest niepustym obszarem $\mathcal{E}^k$, jest płatem k-wymiarowym w $\mathbb{R}^{k+l}$.*

Lemat 10.1 *Niech G będzie niepustym i otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^{k+l}$, $\mathbf{p}$ punktem G, $f\colon G \to \mathbb{R}^l$ dowolnym odwzorowaniem.*
Jeżeli f jest klasy $C^{(1)}(G)$, to zbiór $\{\mathbf{x} \in G : f(\mathbf{p}) = f(\mathbf{x})$ oraz $f'(\mathbf{x})$ jest epimorfizmem[1]$\}$ jest podrozmaitością $\mathbb{R}^{k+l}$.

[1] Epimorfizm, to w naszym wypadku przekształcenie liniowe z $\mathbb{R}^{k+l}$ **na** $\mathbb{R}^l$.

Twierdzenie 10.1 (o wektorach stycznych do podrozmaitości $\mathbb{R}^{k+l}$)

1. *Niech G będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{p}$ punktem G, $\mathbf{q}$ punktem $\mathbb{R}^{k+l}$, a $f\colon G \to \mathbb{R}^l$ dowolnym odwzorowaniem.*

   Jeśli G jest zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^k$, odwzorowanie f jest klasy $C^{(1)}$ na G, $\mathcal{M}$ jest wykresem f (tzn. $\mathcal{M} = \{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in G\}$) i $\mathbf{q} = (\mathbf{p}, f(\mathbf{p})) \in \mathcal{M}$, to zachodzi wzór $T_{\mathbf{q}}\mathcal{M} = \{(\mathbf{v}, f'(\mathbf{q})\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbb{R}^k\}$.

2. *Niech G będzie niepustym i otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^{k+l}$, $\mathbf{p}$ punktem G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^l$ dowolnym odwzorowaniem.*

   Jeśli f jest przekształceniem klasy $C^{(1)}$ na G, $\mathbf{p}$ jest takim punktem, że dla każdego punktu $\mathbf{z}$ z poziomicy $\mathcal{M}$ funkcji f zawierającej punkt $\mathbf{p}$ wynika, że $f'(\mathbf{z})$ jest epimorfizmem, to zachodzi wzór $T_{\mathbf{p}}\mathcal{M} = \ker f'(\mathbf{p})$.

Ekstrema warunkowe c.d.

Niech k, l będą liczbami naturalnymi, G niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^k$, $\mathbf{p}$ punktem $\mathbb{R}^k$.

Definicja 10.4 *Niech G będzie zbiorem otwartym $\mathcal{E}^k$, $\mathbf{p}$ punktem G, $\mathbf{y}$ punktem $\mathbb{R}^l$, $f\colon G \to \mathbb{R}^l$ dowolnym odwzorowaniem. Załóżmy, że odwzorowanie f jest różniczkowalnym na G.*

1. *Punkt $\mathbf{p}$ nazywamy punktem regularnym odwzorowania f wtedy i tylko wtedy, gdy $f'(\mathbf{p})$ jest epimorfizmem.*
2. *Punkt $\mathbf{p}$ nazywamy punktem krytycznym odwzorowania f wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest punktem regularnym f.*
3. *Punkt $\mathbf{y}$ nazywamy wartością krytyczną odwzorowania f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje punkt $\mathbf{x}$ z G taki, że $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ oraz $\mathbf{x}$ jest punktem krytycznym odwzorowania f.*
4. *Punkt $\mathbf{y}$ nazywamy wartością regularną odwzorowania f wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{y}$ nie jest wartością krytyczną odwzorowania f.*

Uwaga 10.2 *Zauważmy, że wartość regularna może w ogóle nie być wartością odwzorowania f. W przeciwobrazie wartości krytycznej mogą znaleźć się punkty regularne, natomiast musi znaleźć się co najmniej jeden punkt krytyczny.*

Uwaga 10.3 *Można definiować punkt krytyczny dla funkcji ograniczonej do zbioru opisanego rówaniami.*

Definicja 10.5 *Niech G będzie niepustym otwartym podzbiorem $\mathcal{E}^{k+l}$, $g\colon G \to \mathbb{R}^l$ dowolnym odwzorowaniem, $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Załóżmy, że F i f są klasy $C^{(1)}$ na G, gradienty funkcji składowych g (tzn. funkcji g_i dla $i \in \overline{1,l}$ i $g = (g_1, \ldots, g_l)$) są liniowo niezależne na zbiorze $M \overset{\text{ozn}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{k+l} : g(\mathbf{x}) = 0\}$, [2] $\mathbf{p}$ punktem M.

Mówimy, że punkt $\mathbf{p}$ z M jest punktem krytycznym $f|_M$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek Lagrange'a, tzn. gdy istnieją liczby rzeczywiste $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ takie, że $\nabla f(\mathbf{p}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{p}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{p}) + \ldots + \lambda_l \nabla g_l(\mathbf{p})$.

Twierdzenie 10.2 (warunek dostateczny istnienia ekstremum warunkowego) *Niech k,l będą liczbami naturalnymi, G zbiorem niepustym i otwartym w $\mathcal{E}^{k+l}$, $\mathbf{p}$ punktem G, $F\colon G \to \mathbb{R}^l$ dowolnym odwzorowaniem, a $f\colon G \to \mathbb{R}$ dowolną funkcją.*

Załóżmy, że F i f są klasy $C^{(2)}$ na G oraz $\mathbf{0} \in F(G) \subset \mathbb{R}^l$ jest wartością regularną odwzorowania F, tzn. spełnia warunek

$$\forall_{\mathbf{x} \in G} F(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow F'(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^{k+l}, \mathbb{R}^l) \text{ jest epimorfizmem.}$$

Niech $\mathbf{p} \in M = F^{-1}(\mathbf{0})$ będzie takim punktem, że istnieją liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ takie, że $\nabla f(\mathbf{p}) = \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i \nabla F_i(\mathbf{p})$ oraz L będzie funkcją Lagrange'a, tzn. $L = f - \sum\limits_{i=1}^{l} \lambda_i F_i$.

Jeżeli $L'(\mathbf{p}) = 0$ oraz

(i) *jeżeli forma kwadratowa $D^2 L(\mathbf{p})$ jest dodatnio określona na przestrzeni stycznej w punkcie $\mathbf{p}$ do zbioru M, to funkcja $f|_M$ ma lokalne minimum właściwe w punkcie $\mathbf{p}$;*

(ii) *jeżeli forma kwadratowa $D^2 L(\mathbf{p})$ jest ujemnie określona na przestrzeni stycznej w punkcie $\mathbf{p}$ do zbioru M, to funkcja $f|_M$ ma lokalne maksimum właściwe w punkcie $\mathbf{p}$;*

(iii) *jeżeli forma kwadratowa $D^2 L(\mathbf{p})$ jest nieokreślona na przestrzeni stycznej w punkcie $\mathbf{p}$ do zbioru M, to funkcja $f|_M$ nie ma lokalnego ekstremum w punkcie $\mathbf{p}$.*

---

[2] Oczywiście zakładamy, że M jest zbiorem niepustym.

Wykład 11

11.12.2007

Uzupełnienia

Twierdzenie 11.1 (o oszacowanie minimalnego stopnia rozciągania liniowego izomorfizmu) *Niech r będzie liczbą naturalną.*

Jeżeli L jest liniowym izomorfizmem przestrzeni $\mathbb{R}^r$, to dla dowolnego punktu $\mathbf{x}$ z $\mathbb{R}^r$ zachodzi nierówność

$$\|L\mathbf{x}\| \geqslant \|L^{-1}\|^{-1}\|\mathbf{x}\|.$$

Niech n będzie dowolną liczba naturalną większą niż jeden, $l, k_1, \ldots, k_n$ dowolnymi liczbami naturalnymi.

Definicja 11.1 *Oznaczmy przez V iloczyn kartezjański $\mathbb{R}^{k_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{k_n}$.*[1]

Mówimy, że przekształcenie $B\colon V \to \mathbb{R}^l$ jest przekształceniem n-liniowym[2] *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego indeksu i ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ i dowolnych $\mathbf{p}_j \in \mathbb{R}^{k_j}$ takich, że $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i\}$, przekształcenie*

$$\mathbb{R}^{k_i} \ni \mathbf{x} \mapsto B(\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{x}, \mathbf{p}_{i+1}, \ldots, \mathbf{p}_n) \in \mathbb{R}^l$$

jest liniowe.

Zbiór wszystkich przekształceń n-liniowych z V do $\mathbb{R}^l$ oznaczać będziemy symbolem $L(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}, \ldots, \mathbb{R}^{k_n}; \mathbb{R}^l)$.

Twierdzenie 11.2 (o normie przekształcenia wieloliniowego) *Jeśli $B \in L(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}, \ldots, \mathbb{R}^{k_n}; \mathbb{R}^l)$, to istnieje nieujemna liczba rzeczywista C taka, że*

$$\|B(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)\| \leqslant C\|\mathbf{x}_1\| \cdot \ldots \cdot \|\mathbf{x}_n\|$$

dla dowolnych wektorów $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{k_1}, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{k_2}, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^{k_n}$.

Twierdzenie 11.3 (o ciągłości przekształcenia wieloliniowego) *Jeśli $B \in L(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}, \ldots, \mathbb{R}^{k_n}; \mathbb{R}^l)$, to B odwzorowuje przestrzeń $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times \ldots \times \mathbb{R}^{k_n}$ w przestrzeń $\mathbb{R}^l$ w sposób ciągły.*

Twierdzenie 11.4 (o pochodnej przekształcenia wieloliniowego) *Jeśli $B \in L(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{k_2}, \ldots, \mathbb{R}^{k_n}; \mathbb{R}^l)$, to B jest różniczkowalne i zachodzi wzór*

$$B'(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n)(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{h}_n) = B(\mathbf{h}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_n) + B(\mathbf{p}_1, \mathbf{h}_2, \ldots, \mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{p}_n) + \ldots + B(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{n-1}, \mathbf{h}_n).$$

Niech r będzie liczba naturalną większą od jedynki, d liczba naturalną, G niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^r$, $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ i $\mathbf{h}$ elementami $\mathbb{R}^r$, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ odwzorowaniem.

Twierdzenie 11.5 (Lagrange'a o wartości średniej dla odwzorowania) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ i $\mathbf{q}$ punktami z G takimi, że $[\mathbf{p}, \mathbf{q}] \subset G$, zaś $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli odwzorowanie f jest różniczkowalne na zbiorze G, to istnieje liczba rzeczywista Θ z odcinak otwartego $]0, 1[$ taka, że

$$\|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})\| \leqslant \|f'(\mathbf{q} + \Theta(\mathbf{p} - \mathbf{q}))\| \cdot \|(\mathbf{p} - \mathbf{q})\|.$$

[1] V jest przestrzenią wektorową wymiaru $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$.
[2] Nazywamy również przekształceniem wieloliniowym.

Wniosek 11.1 *Niech będą spełnione założenia twierdzenia 11.5. Wtedy*

$$\|f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{q})\| \leqslant \sup_{\Theta \in]0,1[} \|f'(\mathbf{q} + \Theta(\mathbf{p} - \mathbf{q}))\| \cdot \|(\mathbf{p} - \mathbf{q})\|.$$

Twierdzenie 11.6 (Schwarza o symetrii drugiej pochodnej) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem zbioru G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeżeli odwzorowanie f jest dwukrotnie różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$, to dla dowolnych $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ z $\mathbb{R}^r$ zachodzi równość

$$D^2 f(\mathbf{p})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = D^2 f(\mathbf{p})(\mathbf{v}, \mathbf{u}).$$

Uwaga 11.1 *Przedstawimy teraz twierdzenie Taylora dla odwzorowań. Ponieważ $D^n f(\mathbf{p})$ jest odwzorowaniem n-liniowym, to przyjmiemy następujące oznaczenie $D^n f(\mathbf{p})\mathbf{h}^n \overset{\text{ozn}}{=} D^n f(\mathbf{p})(\mathbf{h}, \ldots, \mathbf{h})$.*

Twierdzenie 11.7 (wzór Taylora z resztą Peano) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem zbioru G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeśli odwzorowanie f jest n-krotnie różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ i r_n oznacza n-tą resztę tzn.

$$f(\mathbf{p} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{p}) + Df(\mathbf{p})\mathbf{h} + \frac{1}{2!} D^2 f(\mathbf{p})\mathbf{h}^2 + \ldots + \frac{1}{n!} D^n f(\mathbf{p})\mathbf{h}^n + r_n(\mathbf{h}),$$

gdzie $\mathbf{h}$ jest takie, aby odcinek $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + \mathbf{h}]$ zawarty był w pewnym podzbiorze otwartym dziedziny, to

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{r_n(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^n} = 0.$$

Twierdzenie 11.8 (Lagrange'a o wzorze Taylora) *Niech G będzie zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^r$, $\mathbf{p}$ punktem zbioru G, a $f\colon G \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem.*

Jeśli odwzorowanie f jest $n+1$-krotnie różniczkowalna w punkcie $\mathbf{p}$ i r_n oznacza n-tą resztę, to

$$\|r_n(\mathbf{h})\| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{\Theta \in]0,1[} \|D^{(n+1)} f(\mathbf{p} + \Theta\mathbf{h})\| \cdot \|\mathbf{h}\|^{n+1}.$$

Przy czym jeśli $d = 1$, to istnieje liczba Θ z odcinka $]0,1[$ taka, że $r_n(\mathbf{h}) = \frac{1}{(n+1)!} D^{(n+1)} f(\mathbf{p} + \Theta\mathbf{h})\mathbf{h}^{n+1}$.

Wykład 12

18.12.2007

Niech X będzie niepustym zbiorem, rodzina Σ σ-ciałem podzbiorów zbioru X, μ miarą nieujemną na Σ, A podzbiorem X, zaś $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ dowolnymi funkcjami.

Uwaga 12.1 *Przed zdefiniowaniem całki Lebesgue'a wprowadźmy oznaczenie*

$$K(f) \overset{\text{ozn}}{=} \{p \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}_+ : p \leqslant f\},$$

gdzie f jest dowolną nieujemną funkcją Σ-mierzalną.

Definicja 12.1 *Niech f będzie funkcją Σ-mierzalną.*

(Część I) *Jeżeli f jest nieujemną funkcją prostą (tzn. $f = \sum\limits_{k=1}^{n(f)} a_k I_{A_k}$), to całką Lebesgue'a z funkcji f względem miary μ nazywamy element rozszerzonego zbioru liczb rzeczywistych zadany równością*

$$\int\limits_X f d\mu \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n(f)} a_k \mu(A_k). \tag{12.1}$$

(Część II) *Jeżeli f jest dowolną nieujemną funkcją, to całką Lebesgue'a z funkcji f względem miary μ nazywamy element rozszerzonego zbioru liczb rzeczywistych zadany równością*

$$\int\limits_X f d\mu \overset{\text{def}}{=} \sup_{p \in K(f)} \int_X p d\mu. \tag{12.2}$$

(Część III) *Jeżeli f jest funkcją dowolnego znaku oraz przynajmniej jedna z całek*

$$\int\limits_X f^- d\mu, \quad \int\limits_X f^+ d\mu \tag{12.3}$$

jest skończona, to całką Lebesgue'a z funkcji f względem miary μ nazywamy element rozszerzonego zbioru liczb rzeczywistych zadany równością

$$\int\limits_X f d\mu \overset{\text{def}}{=} \int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu. \tag{12.4}$$

Jeżeli obie całki w (12.3) są skończone, to funkcje f nazywamy całkowalną względem μ.

Definicja 12.2 *Niech A będzie zbiorem Σ-mierzalnym, a f funkcją Σ-mierzalną.*

Jeżeli istnieje całka $\int_X I_A f d\mu$, to całkę Lebesgue'a z funkcji f względem miary μ po zbiorze A, oznaczaną $\int\limits_A f d\mu$, nazywamy element rozszerzonego zbioru liczb rzeczywistych równy całce

$$\int_X I_A f d\mu.$$

Uwaga 12.2 *Zbiór wszystkich Σ-mierzalnych funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a względem miary μ na X oznaczamy przez $\mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$, natomiast zbiór wszystkich Σ-mierzalnych funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a na Σ-mierzalnym zbiorze A względem miary μ oznaczamy przez $\mathfrak{L}(A,\Sigma,\mu)$.*

Wniosek 12.1 *Jeżeli f jest nieujemną i prostą funkcja Σ-mierzalną taką, że $f = \sum\limits_{k=1}^{n(f)} a_k I_{A_k}$, to*

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{k=1}^{n(f)} a_k \mu(A \cap A_k). \tag{12.5}$$

Dowód. Niech będą spełnione założenia wniosku. Wtedy wystarczy zauważyć, że $I_A f = \sum\limits_{k=1}^{n(f)} a_k I_{A\cap A_k}$ i $I_A f$ jest więc funkcją prostą. □

Uwaga 12.3 *Będziemy bardzo często korzystać z faktu o przedstawieniu funkcji $I_A f$, gdy $f = \sum\limits_{k=1}^{n(f)} a_k I_{A_k}$, zauważonego w dowodzie ostatniego wniosku.*

Wniosek 12.2 *Niech A będzie dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym, a f funkcją Σ-mierzalną.*

1. *$f \in \mathfrak{L}(A,\Sigma,\mu)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I_A f \in \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$.*
2. *Jeżeli całka $\int\limits_A f d\mu$ jest określona, to $\int\limits_A f d\mu = \int\limits_A f^+ d\mu - \int\limits_A f^- d\mu$.*
3. *Jeżeli $f \in \mathfrak{L}(A,\Sigma,\mu)$, to $f^+, f^- \in \mathfrak{L}(A,\Sigma,\mu)$.*

Wniosek 12.3 *Niech A będzie dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym, a f funkcją Σ-mierzalną.*
Jeżeli f jest funkcja nieujemną, to

$$\int\limits_A f d\mu \in [0,+\infty].$$

Lemat 12.1 *Niech f,g będą nieujemnymi funkcjami prostymi Σ-mierzalnymi. Jeżeli $0 \leqslant f \leqslant g$ na X, to $\int\limits_X f d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu$.*

Dowód. Niech $f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_{A_k}$, $g = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i I_{B_i}$ i niech $\mathfrak{I} = \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\}$. Wtedy $a_k = f(x) \leqslant g(x) = b_i$ dla dowolnych $k = 1,\dots,n$, $i = 1,\dots,m$ o ile $x \in A_k \cap B_i$ lub inaczej $A_k \cap B_i \neq \emptyset$, więc

$$\forall_{(k,i)\in\mathfrak{I}} a_k m(A_k \cap B_i) \leqslant b_i m(A_k \cap B_i)$$

oraz

$$\begin{aligned}
\int\limits_X f d\mu &= \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap (\bigcup_{i=1}^{m} B_i)) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(\bigcup_{i=1}^{m} (A_k \cap B_i)) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_k \mu(A_k \cap B_i) = \sum_{(k,i)\in\mathfrak{I}} a_k m(A_k \cap B_i) \leqslant \sum_{(k,i)\in\mathfrak{I}} b_k \mu(A_k \cap B_i) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_i \mu(A_k \cap B_i) = \sum_{i=1}^{m} b_i \mu(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{m} b_i \mu(B_i) = \int\limits_A g d\mu.
\end{aligned}$$

□

Wniosek 12.4 *Niech A będzie dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym, a f,g nieujemnymi funkcjami prostymi Σ-mierzalnymi.*
Jeżeli $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ dla wszystkich $x \in A$, to $\int\limits_A f d\mu \leqslant \int\limits_A g d\mu$.

Dowód. Niech będą spełnione założenia wniosku. Wtedy korzystając z założeń, określenia całki pozbiorze, udowodnionego przed chwilą lematu otrzymujemy $I_A f \leqslant I_A g$ na X oraz

$$\int\limits_A f d\mu \quad = \quad \int\limits_X I_A f d\mu \leqslant \int\limits_X I_A g d\mu = \int\limits_A g d\mu.$$

□

Twierdzenie 12.1 *Całki z Σ-mierzalnej i nieujemnej funkcji prostej liczone zgodnie z określeniami (12.1) oraz (12.2) są równe.*

Dowód. Niech p będzie Σ-mierzalną i nieujemną funkcją prostą. Wtedy $p \in K(p)$ i oczywiście

$$\sup_{p_1 \in K(p)} \int_X p_1 d\mu \geqslant \int_X p d\mu.$$

Niech teraz p_1 będzie dowolną Σ-mierzalną i nieujemną funkcja prostą z $K(p)$. Wtedy $p_1 \leqslant p$ i zgodnie z lematem *12.1* mamy

$$\int_X p_1 d\mu \leqslant \int_X p d\mu.$$

Biorąc supremum po wszystkich p_1 z $K(p)$ otrzymujemy tezę. □

Lemat 12.2 *Niech A będzie dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym, a f funkcją Σ-mierzalną.*

Jeżeli $\mu(A) = 0$, to całka $\int\limits_A f d\mu$ istnieje oraz zachodzi równość $\int\limits_A f d\mu = 0$.

Dowód. krok i. Niech $f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_{A_k}$. Wtedy $I_A f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_{A \cap A_k}$ i $\mu(A \cap A_k) = 0$ i stąd teza wynika z definicji całki Lebesgue'a (**część I**).

krok ii. Niech $f \geqslant 0$ Wtedy dla dowolnej funkcji $p \in K(I_A f)$ na mocy kroku i mamy $\int\limits_X p d\mu = 0$, a więc $\sup\limits_{p \in K(I_A f)} \int\limits_X p d\mu = 0$.

krok iii. Niech f będzie dowolna. Wtedy $f = f^+ - f^-$. Na mocy kroku i mamy $\int\limits_A f^{\pm} d\mu = 0$, a stąd tezę na mocy **części III** definicji całki Lebesgue'a otrzymujemy tezę. □

Wniosek 12.5 *Jeżeli f jest Σ-mierzalna, to całka $\int\limits_{\emptyset} f d\mu$ istnieje oraz $\int\limits_{\emptyset} f d\mu = 0$.*

Lemat 12.3 *Jeżeli $f = \alpha$ na X dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$, to całka $\int\limits_X f d\mu$ istnieje oraz $\int\limits_X f d\mu = \alpha\mu(X)$.*

Dowód. Niech będą spełnione założenia lematu. Wtedy f jest Σ-mierzalna.

Jeśli teraz $\alpha \geqslant 0$, to wykorzystując **część I** definicji *12.1* otrzymujemy tezę lematu. Jeżeli teraz $\alpha < 0$, to $f^+ \equiv 0$ oraz $f^- = (-\alpha)$. A ponieważ $\int\limits_X f^+ d\mu = 0 \cdot \mu(X) = 0$ i $\int\limits_X f^- d\mu = (-\alpha) \cdot \mu(X)$, to

$$\int\limits_X f d\mu = 0 - (-\alpha)\mu(X) = \alpha\mu(X)$$

na mocy **część III** definicji *12.1*. □

Lemat 12.4 *Niech A będzie dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym, a f funkcją Σ-mierzalną.*

Jeżeli $f(x) = \alpha$ dla wszystkich $x \in A$ i pewnego $\alpha \in \mathbb{R}$, to całka $\int\limits_A f d\mu$ istnieje oraz $\int\limits_A f d\mu = \alpha\mu(A)$. Jeżeli dodatkowo $\mu(A) < +\infty$, to $f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$.

Dowód. Niech będą spełnione założenia lematu. Wtedy $I_A f = \alpha I_A$ i w konsekwencji $\int\limits_A f d\mu = \alpha\mu(A)$ na mocy **części I** definicji całki o ile α jest liczbą rzeczywistą nieujemną. Jeżeli α jest ujemne, to $(I_A f)^+ \equiv 0$ oraz $(I_A f)^- = (-\alpha) I_A$. Wystarczy więc zastosować trzeci punkt definicji całki. Ostatnia część tezy wynika z pierwszej. □

Lemat 12.5 *Niech f, g będą dowolnymi funkcjami Σ-mierzalnymi.*

Jeżeli $0 \leqslant f \leqslant g$ na X, to $\int\limits_X f d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu$. Jeżeli dodatkowo $g \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$, to $f \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$.

Dowód. Jeżeli f i g są dowolnymi funkcjami nieujemnymi spełniającymi założenia lematu. Wtedy $K(f) \subset K(g)$, a więc

$$\left\{\int_X p d\mu : p \in K(f)\right\} \subset \left\{\int_X p d\mu : p \in K(f)\right\}.$$

Na mocy własności kresu górnego i definicji *12.1* mamy

$$\int\limits_X f d\mu = \sup_{p \in K(f)} \int\limits_X p d\mu \leqslant \sup_{p \in K(g)} \int\limits_X p d\mu = \int\limits_X g d\mu. \tag{12.6}$$

Ostatnia część tezy wynika z oszacowania *(12.6)* i wniosku *12.3*. □

Wniosek 12.6 *Niech A będzie dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym, a f, g funkcjami Σ-mierzalnymi.*

Jeżeli $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ dla wszystkich $x \in A$, to $\int\limits_A f d\mu \leqslant \int\limits_A g d\mu$. Jeżeli dodatkowo $g \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$, to $f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$.

Lemat 12.6 *Niech f, g będą dowolnymi funkcjami Σ-mierzalnymi.*

Jeżeli $f \leqslant g$ na X i $g \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$, to $f^+ \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$ oraz $\int\limits_X f d\mu \leqslant \int\limits_X g d\mu$.

Dowód. Mamy

$$0 \leqslant f^+ \leqslant g^+ \text{ oraz } 0 \leqslant g^- \leqslant f^- \text{ dla dowolnego } x \in X.$$

Ponadto $g^+ \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$, więc zgodnie z lematem *12.5* mamy $f^+ \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$, czyli $\int\limits_X f^+ d\mu < +\infty$. Jeżeli teraz $\int\limits_X f^- d\mu = +\infty$, to

$$-\infty = \int\limits_X f d\mu < \int\limits_X g d\mu.$$

Jeżeli teraz $\int\limits_X f^- d\mu < +\infty$, to stosując lemat *12.5* do części nieujemnych i niedodatnich otrzymujemy

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu \leqslant \int\limits_X g^+ d\mu - \int\limits_X g^- d\mu = \int\limits_X g d\mu.$$

□

Wniosek 12.7 *Niech A będzie dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym, a f, g funkcjami Σ-mierzalnymi.*

Jeżeli $f(x) \leqslant g(x)$ dla wszystkich $x \in A$ i $g \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$, to $f^+ \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$ oraz $\int\limits_A f d\mu \leqslant \int\limits_A g d\mu$.

Lemat 12.7 *Niech A będzie dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym, a f funkcją Σ-mierzalną.*

Jeżeli $A \neq \emptyset$, $\mu(A) < +\infty$ i f jest ograniczona na A, to $f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$ oraz

$$\mu(A) \inf_{x \in A}\{f(x)\} \leqslant \int\limits_A f d\mu \leqslant \mu(A) \sup_{x \in A}\{f(x)\}.$$

Dowód. Niech $l = \inf\limits_{x \in A}\{f(x)\}$ oraz $L = \sup\limits_{x \in A}\{f(x)\}$. Wtedy

$$l \leqslant f(x) \leqslant L \text{ dla dowolnego } x \in A.$$

krok i. Załóżmy, że $f \geqslant 0$. Wtedy $l \geqslant 0$ i teza wynika z wniosków *12.6, 12.4*.

krok ii. Załóżmy, że $f \leqslant 0$. Wtedy $I_A f = -I_A f^-$, $L \leqslant 0$ oraz $(-L) \leqslant I_A f^- \leqslant (-l)$. Stosując krok i do funkcji $I_A f^-$ otrzymujemy $\mu(A) \cdot (-L) \leqslant \int\limits_A f^- d\mu \leqslant \mu(A) \cdot (-l)$. Mnożąc nierówność przez -1 i stosując **cześć III** definicji *12.1* otrzymujemy tezę.

krok iii. Niech f przyjmuje wartości ujemne i dodatnie. Wtedy $l < 0$ oraz $L > 0$. Niech $T = \max\{|l|, |L|\}$. Wtedy $I_A f^- \leqslant T$ i $I_A f^+ \leqslant T$ oraz $\int\limits_A f^{\pm} d\mu \leqslant T \cdot \mu(A) < +\infty$, a więc $f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$. Ponadto $0 \leqslant \int\limits_A f^+ d\mu \leqslant L \cdot \mu(A)$, $0 \leqslant \int\limits_A f^- d\mu \leqslant (-l) \cdot \mu(A)$ jak również

$$-\int\limits_A f^- d\mu \leqslant \int\limits_A f^+ d\mu - \int\limits_A f^- d\mu \leqslant \int\limits_A f^+ d\mu.$$

Daje to tezę w tym przypadku. □

Lemat 12.8 *Niech A będzie dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym, a f funkcją Σ-mierzalną.*
Jeżeli $f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$ i $\alpha \in \mathbb{R}$, to $\alpha \cdot f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$ oraz $\int\limits_A (\alpha \cdot f) d\mu = \alpha \int\limits_A f d\mu$.

Dowód. Niech będą spełnione założenia lematu.

krok i. Załóżmy, że $\alpha = 0$. Wtedy $I_A(\alpha \cdot f) \equiv 0$ i zgodnie z wnioskiem *12.4* mamy

$$\int\limits_A (\alpha f) d\mu = 0 = \alpha \cdot \int\limits_A f d\mu.$$

krok ii. Załóżmy, że $\alpha > 0$ i funkcja f jest nieujemna. Wtedy

$$\forall_{p \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}_+} p \in K(I_A(\alpha \cdot f)) \Leftrightarrow \frac{p}{\alpha} \in K(I_A f) \text{ oraz } \forall_{q \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}_+} q \in K(I_A f) \Leftrightarrow \alpha \cdot q \in K(I_A(\alpha \cdot f)).$$

Mamy wtedy

$$\forall_{p \in K(I_X(\alpha \cdot f))} \int\limits_X p d\mu = \alpha \cdot \int\limits_X \frac{p}{\alpha} d\mu \leqslant \alpha \cdot \int\limits_X f d\mu,$$
$$\forall_{q \in K(I_X f)} \int\limits_X q d\mu = \frac{1}{\alpha} \cdot \int\limits_X \alpha \cdot q d\mu \leqslant \frac{1}{\alpha} \cdot \int\limits_X \alpha \cdot f d\mu,$$

a stąd

$$\int\limits_X (\alpha \cdot f) d\mu \leqslant \alpha \cdot \int\limits_X f d\mu \text{ oraz } \int\limits_X f d\mu \leqslant \frac{1}{\alpha} \int\limits_X (\alpha \cdot f) d\mu.$$

krok iii. Załóżmy, że $\alpha > 0$ i funkcja f jest dowolna. Wtedy $f = f^+ - f^-$ i $(\alpha \cdot f)^+ = \alpha \cdot f^+$ oraz $(\alpha \cdot f)^- = \alpha \cdot f^-$. Stąd

$$\begin{aligned} \int\limits_A (\alpha \cdot f) d\mu &= \int\limits_A (\alpha \cdot f)^+ d\mu - \int\limits_A (\alpha \cdot f)^- d\mu = \int\limits_A \alpha \cdot f^+ d\mu - \int\limits_A \alpha \cdot f^- d\mu = \alpha \int\limits_A f^+ d\mu - \alpha \int\limits_A f^- d\mu \ \ (\text{krok ii}) \\ &= \alpha \left(\int\limits_A f^+ d\mu - \int\limits_A f^- d\mu \right) = \alpha \cdot \int\limits_A f d\mu. \end{aligned}$$

krok iv. Załóżmy, że $\alpha < 0$ i funkcja f jest dowolna. Wtedy $f = f^+ - f^-$ i $(\alpha \cdot f)^+ = (-\alpha) \cdot f^-$ oraz $(\alpha \cdot f)^- = (-\alpha) \cdot f^+$. Stąd

$$\begin{aligned} \int\limits_A (\alpha \cdot f) d\mu &= \int\limits_A (\alpha \cdot f)^+ d\mu - \int\limits_A (\alpha \cdot f)^- d\mu = \int\limits_A (-\alpha) \cdot f^- d\mu - \int\limits_A (-\alpha) \cdot f^+ d\mu \\ &= (-\alpha) \int\limits_A f^- d\mu - (-\alpha) \int\limits_A f^+ d\mu \ \ (\text{krok ii}) \ = \alpha \left(\int\limits_A f^+ d\mu - \int\limits_A f^- d\mu \right) = \alpha \cdot \int\limits_A f d\mu. \end{aligned}$$

□

Lemat 12.9 *Niech A i B będą dowolnymi zbiorami Σ-mierzalnymi, a f funkcją Σ-mierzalną.*
Jeżeli $B \subset A$ i f jest nieujemna na A, to całka $\int\limits_B f d\mu$ istnieje i $\int\limits_B f d\mu \leqslant \int\limits_A f d\mu$.
Jeżeli dodatkowo $f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$, to $f \in \mathfrak{L}(B, \Sigma, \mu)$.

Dowód. Niech $A, B \in \Sigma$, $B \subset A$ i f będzie funkcją nieujemną na A i Σ-mierzalną.

krok i. Załóżmy, że f jest funkcją prostą i niech $f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_{A_k}$. Wtedy

$$\int\limits_B f d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap B) \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap A) = \int\limits_A f d\mu.$$

krok ii. Załóżmy, że f dowolną funkcją nieujemną na A. Wtedy na macy kroku i oraz definicji całki Lebesgue'a otrzymujmy

$$\forall_{p \in K(I_A f)} \int\limits_B p d\mu \leqslant \int\limits_A p d\mu \leqslant \int\limits_A f d\mu,$$

a stąd wynika teza. □

Wniosek 12.8 *Niech A i B będą dowolnymi zbiorami Σ-mierzalnymi, a f funkcją Σ-mierzalną.*
Jeżeli $f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$ i $B \subset A$, to $f \in \mathfrak{L}(B, \Sigma, \mu)$.

DOWÓD. Niech f będzie funkcją Σ-mierzalną taką, że $f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$ i $A, B \in \Sigma$ oraz $B \subset A$. Wtedy $f^{\pm} \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$, a stąd $f^{\pm} \in \mathfrak{L}(B, \Sigma, \mu)$ (zgodnie z lematem *12.9*), więc i również $f \in \mathfrak{L}(B, \Sigma, \mu)$. □

Lemat 12.10 *Dla dowolnej Σ-mierzalnej i nieujemnej funkcji prostej p odwzorowanie*

$$\Sigma \ni A \mapsto \mu_p(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A p d\mu \tag{12.7}$$

jest miara nieujemną.

DOWÓD. Niech $p = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{B_k}$ będzie Σ-mierzalną i nieujemną funkcją prostą. Mamy $\mu_p(\emptyset) = 0$ zgodnie z wnioskiem *12.5*. Niech $\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \Sigma$ będzie ciągiem zbiorów parami rozłącznych. Oznaczmy $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Mamy

$$\begin{aligned} \mu_p(A) &= \int_A p d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(B_k \cap A) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_k \cap A_n)) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_k \cap A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(B_k \cap A_n) \text{ (szereg o wyrazach nieujemnych)} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_p(A_n). \end{aligned}$$

□

Wykład 13

15.01.2008

Niech X będzie niepustym zbiorem, Σ σ-ciałem jego podzbiorów, μ miarą nieujemną na Σ, A podzbiorem X, zaś $f, g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ dowolnymi funkcjami.

Twierdzenie 13.1 *Niech f będzie funkcją nieujemną i Σ-mierzalną. Wówczas funkcja*

$$\Sigma \ni A \mapsto \mu_f(A) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_A f d\mu \tag{13.1}$$

jest miarą nieujemną.

Dowód. Niech f będzie Σ-mierzalną i nieujemną funkcją. Podobnie jak w lemacie *12.10* mamy $\mu_f(\emptyset) = 0$. Niech $\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \Sigma$ będzie ciągiem zbiorów parami rozłącznych. Oznaczmy $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

przypadek i. Istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że $\mu_f(A_n) = +\infty$. Wtedy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m_f(A_n) = +\infty$ i zgodnie z lematem *12.9* zachodzi teza (bo $\mu_f(A_n) \leqslant \mu_f(A)$).

przypadek ii. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ jest $\mu_f(A_n) < +\infty$. Mamy

$$\forall_{p \in K(I_A f)} \int\limits_A p d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} p d\mu \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n),$$

a stąd

$$\mu_f(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(A_n).$$

Udowodnimy teraz nierówność przeciwną. Wpierw udowodnimy, że

$$\int\limits_{A_1 \cup A_2} f d\mu \geqslant \int\limits_{A_1} f d\mu + \int\limits_{A_2} f d\mu \text{ dla dowolnych } \Sigma\text{-mierzalnych zbiorów rozłącznych } A_1 \text{ i } A_2.$$

Niech ε będzie dowolna liczbą dodatnią. Istnieje wtedy funkcja prosta $p \in K(I_{A_1 \cup A_2} f)$ (zgodnie z definicjami całki Lebesgue'a i kresu górnego) taka, że

$$\int\limits_{A_i} p d\mu + \frac{\varepsilon}{2} > \int\limits_{A_i} f d\mu \text{ dla } i = 1, 2.$$

(Można rozważyć funkcje proste p_i oddzielnie na każdym zbiorze A_i kładąc zero poza zbiorem A_i i dodać je, rozważając oddzielnie całki na każdym ze zbiorów. Tak skonstruowana funkcja jest z $K(I_{A_1 \cup A_2} f)$.) Otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned} \int\limits_{A_1} f d\mu + \int\limits_{A_2} f d\mu &< \varepsilon + \int\limits_{A_1} p d\mu + \int\limits_{A_2} p d\mu = \varepsilon + \int\limits_{A_1 \cup A_2} p d\mu \text{ bo } \mu_p \text{ jest miarą nieujemną} \\ &\leqslant \varepsilon + \int\limits_{A_1 \cup A_2} f d\mu. \end{aligned}$$

Ponieważ ε było dowolne, więc zachodzi oszacowanie $\int_{A_1} fd\mu + \int_{A_2} fd\mu \leqslant \int_{A_1\cup A_2} fd\mu$. Indukcyjnie dowodzimy, że

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{A_k} fd\mu \leqslant \int_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} fd\mu,$$

o ile zbiory $A_1,\dots,A_n$ są parami rozłączne. Ponieważ $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$, więc zgodnie z z lematem *12.9* mamy

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} \mu_f(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{A_k} fd\mu \leqslant \int_{\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k} fd\mu \leqslant \int\limits_{A} fd\mu = \mu_f(A).$$

Przechodząc z n w granicy do nieskończoności otrzymujemy żądaną nierówność. □

Wniosek 13.1 *Niech f będzie dowolną funkcją Σ-mierzalną.*

Jeżeli $f \in \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$, to funkcja μ_f zadana w wzorem (13.1) jest σ - addytywna oraz $\mu_f(\emptyset) = 0$. Ponadto przyjmuje tylko wartości skończone oraz $m_f = m_{f^+} - m_{f^-}$.

Dowód. Ponieważ $\int\limits_A fd\mu = \int\limits_A f^+ d\mu - \int\limits_A f^- d\mu$ dla dowolnego $A \in \Sigma$, więc teza wynika z udowodnionego twierdzenia *13.1.* □

Uwaga 13.1 *μ_f z ostatniego wniosku nazywamy miarą znakową.*

Wniosek 13.2 *Niech A i B będą dowolnymi zbiorami Σ-mierzalnymi, a f funkcją Σ-mierzalną.*

Jeżeli $f \in \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$ lub f jest nieujemna oraz $A\cap B = \emptyset$, to $\int\limits_{A\cup B} fd\mu = \int\limits_A fd\mu + \int\limits_B fd\mu$.

Dowód. Wystarczy rozważyć ciąg $\{A_n : n \geqslant 1\}$, gdzie $A_1 = A, A_2 = B$ oraz $A_n = \emptyset$ dla $n > 2$ i wykorzystać wnioski *13.1, 12.5.* □

Wniosek 13.3 *Niech f będzie dowolną funkcją Σ-mierzalną.*

Załóżmy, że f jest funkcją nieujemną bądź $f \in \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$ oraz $\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \Sigma$.

1. *Jeżeli $\{A_n : n \geqslant 1\}$ jest ciągiem wstępującym, to*

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} fd\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} fd\mu.$$

2. *Jeżeli $\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \Sigma$ jest ciągiem zstępującym, to*

$$\int_{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} fd\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} fd\mu.$$

Lemat 13.1 *Całka Lebesgue'a nie zależy od wartości całkowanej funkcji na zbiorze miary zero tzn.*

$$\forall_{f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}} \forall_{B\in\Sigma} f \ \Sigma\text{-mierzalna} \wedge (f \in \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu) \vee f \geqslant 0) \wedge \mu(B) = 0 \Rightarrow \int\limits_X fd\mu = \int\limits_{X\setminus B} fd\mu.$$

Dowód. Niech będzie dana Σ-mierzalna funkcja $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, zbiór Σ-mierzalny B takie, że $f \in \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$ i $\mu(B) = 0$. Ponieważ $X = (X\cap B)\cup(X\setminus B)$ oraz $X\cap B \subset B$ i $(X\cap B)\cap(X\setminus B) = \emptyset$, więc teza wynika z wniosku *13.2* i lematu *12.2* oraz twierdzenia odp tw. □

Uwaga 13.2 *W następnym wniosku nie musimy zakładać, że funkcja g jest Σ-mierzalna, o ile funkcja f jest Σ-mierzalna. Σ-mierzalność funkcji g wynika z założeń oraz odpowiedniego twierdzenia dla miary zupełnej.*

Wniosek 13.4 *Niech μ będzie nieujemną miarą zupełną, a f funkcją Σ-mierzalną.*

Jeżeli f jest nieujemna bądź $f \in \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$ oraz funkcja g jest μ prawie wszędzie równa funkcji f, to

$$\int\limits_X fd\mu = \int\limits_X gd\mu.$$

Ponadto w przypadku, gdy $f \in \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$, to $g \in \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$.

Dowód. Niech $B = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$. Wtedy $\mu(B) = 0$ oraz

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_{X\setminus B} f d\mu + \int\limits_B f d\mu = \int\limits_{X\setminus B} g d\mu + 0 = \int\limits_{X\setminus B} g d\mu + \int\limits_B g d\mu = \int\limits_X g d\mu.$$

□

Uwaga 13.3 *Ostatni wniosek pozostaje słuszny, gdy zamiast zupełności miary μ założymy Σ-mierzalność funkcji g.*

Lemat 13.2 *Niech f będzie dowolną funkcją Σ-mierzalną.*
Wówczas $f \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|f| \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$.

Dowód. Niech f będzie Σ-mierzalna.

(Konieczność). Załóżmy, że $f \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$. Wtedy zgodnie z wnioskiem *12.2* mamy $f^{\pm} \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$. Niech

$$X_- \overset{\text{ozn}}{=} \{x \in X : f(x) < 0\} \text{ oraz } X_+ \overset{\text{ozn}}{=} \{x \in X : f(x) \geqslant 0\}.$$

Wtedy $X_- \cup X_+ = X$, zbiory są rozłączne i Σ-mierzalne.

$$\int\limits_X |f| d\mu = \int\limits_{X_-} |f| d\mu + \int\limits_{X_+} |f| d\mu = \int\limits_{X_-} f^- d\mu + \int\limits_{X_+} f^+ d\mu \leqslant \int\limits_X f^- d\mu + \int\limits_X f^+ d\mu < +\infty.$$

(Dostateczność). Ponieważ $0 \leqslant f^{\pm} \leqslant |f|$, więc $\int\limits_X f^{\pm} d\mu < +\infty$ na mocy lematu *12.5*. Zgodnie z definicją całki Lebesgue'a kończy to dowód. □

Wniosek 13.5 *Niech A będzie dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym, a f funkcją Σ-mierzalną.*
Wówczas $f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $|f| \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$.

Lemat 13.3 *Niech A będzie dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym, a f funkcją Σ-mierzalną.*
Jeżeli $f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$ oraz dla dowolnego $x \in A$ zachodzi $|g(x)| \leqslant f(x)$, to $g \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$.

Dowód. Z lematu *12.5* mamy $|g| \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$, więc teza wynika z lematu *13.2.* □

Lemat 13.4 *Jeżeli f jest funkcją Σ-mierzalną taką, że $f \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$, to*

$$\left|\int_X f d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f| d\mu. \tag{13.2}$$

Dowód. Ponieważ $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, więc zgodnie z lematem *12.6* daje

$$-\int\limits_X |f| d\mu \leqslant \int_X f d\mu \leqslant \int\limits_X |f| d\mu.$$

□

Twierdzenie 13.2 (Lebesgue'a - Beppo Leviego/Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej) *Niech μ będzie miarą zupełną, a $\left\{f_n \colon X \to \overline{\mathbb{R}} : n \geqslant 1\right\}$ niemalejącym ciągiem nieujmenych funkcji Σ-mierzalnych. Wówczas*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X (\lim_{n\to\infty} f_n) d\mu \tag{13.3}$$

Dowód. Niech funkcja $f \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ będzie granicą punktową ciągu funkcyjnego (f_n) tzn.

$$\forall_{x\in X} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ponieważ dla dowolnego $x \in X$ ciąg $(f_n(x))$ jest niemalejący, więc zgodnie z odpowiednimi twierdzeniami dla ciągów liczbowych monotonicznych jest on zbieżny do granicy skończonej lub niewłaściwej $(+\infty)$. Funkcja f jest Σ-mierzalna jako granica funkcji mierzalnych. Ponadto $0 \leqslant f_n \leqslant f$ dla dowolnej liczby naturalnej n. Mamy więc

$$\int\limits_X f_n d\mu \leqslant \int\limits_X f d\mu. \tag{13.4}$$

PRZYPADEK I. Istnieje liczba naturalna k taka, że $\int\limits_X f_k d\mu = +\infty$. Wtedy dla dowolnego $n \geqslant k$, zgodnie z lematem *12.5*, mamy $\int\limits_X f_n d\mu = +\infty$, a więc $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = +\infty$ i $\int\limits_X f d\mu = +\infty$.

PRZYPADEK II. Dla dowolnego n jest $\int\limits_X f_n d\mu < +\infty$. Niech

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty n} \int\limits_X f_n d\mu \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Mamy wtedy $\alpha \in [0, +\infty]$.

PRZYPADEK A. $\alpha = +\infty$. Przechodząc z n do $+\infty$ w nierówności *(13.4)* otrzymujemy tezę.

PRZYPADEK B. $\alpha < +\infty$. Na podstawie nierówności *(13.4)* mamy $\alpha \leqslant \int\limits_X f d\mu$. Stąd wystarczy udowodnić nierówność przeciwną. Niech $p \in K(f)$ i $c \in]0, 1[$ będą dowolne. Określmy zbiory

$$A_n \overset{\text{def}}{=} \{x \in X : f_n(x) \geqslant cp(x)\} \text{ dla dowolnego } n \geqslant 1.$$

Są one Σ-mierzalne i ponieważ ciąg (f_n) jest niemalejący, więc ciąg (A_n) jest wstępujący oraz suma wszystkich zbiorów A_n daje zbiór X. Mamy wtedy

$$c \int\limits_{A_n} p d\mu = \int\limits_{A_n} c \cdot p d\mu \leqslant \int\limits_{A_n} f_n d\mu \leqslant \int\limits_X f_n d\mu.$$

Stąd $\alpha \geqslant c \int\limits_X p d\mu$. Ponieważ p była dowolna więc nierówność ta jest prawdziwa dla kresu górnego względem p z $K(f)$, co daje $\alpha \geqslant c \int\limits_X f d\mu$. Biorąc granicę przy $c \to 1^-$ otrzymujemy $\alpha \geqslant \int\limits_X f d\mu$. □

Twierdzenie 13.3 (Lemat Fatou) *Niech ciąg* $\left\{f_n : X \to \overline{\mathbb{R}} : n \in \mathbb{N}\right\}$ *będzie ciągiem nieujemnych funkcji* Σ*-mierzalnych. Wówczas*

$$\int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu. \tag{13.5}$$

DOWÓD. Określmy funkcje

$$g_n = \inf_{k \geqslant n} f_k \text{ dla } n \geqslant 1.$$

Funkcje g_n są Σ-mierzalne, a ponadto tworzą one niemalejący ciąg funkcji nieujemnych taki, że $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ oraz $f_n \geqslant g_n$. Mamy wtedy

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \geqslant \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X g_n d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} g_n d\mu = \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

□

Wykład 14

22.01.2008

Niech X będzie niepustym zbiorem, Σ σ-ciałem jego podzbiorów, μ miarą nieujemną na Σ, A podzbiorem X, zaś $f, g \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ dowolnymi funkcjami.

Lemat 14.1 *Jeżeli f i g są nieujemnymi funkcjami Σ-mierzalnymi, to*

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \tag{14.1}$$

Jeżeli dodatkowo $f, g \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$, to $f + g \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$.

Dowód. Po pierwsze zauważmy, że jeżeli udowodnimy równość *(14.1)*, to będziemy mieli ostatnią część tezy.

przypadek i. f, g są funkcjami prostymi. Niech $f = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k I_{A_k}$ i $g = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i I_{B_i}$ i każda z rodzin zbiorów (A_k) i (B_i) jest parami rozłączna i dają cały zbiór A. Wtedy zbiory $C_{k,i} = A_k \cap B_i$ są parami rozłączne i w sumie dają zbiór A i dla dowolnego $x \in C_{k,i}$ mamy $f(x) + g(x) = a_k + b_i$. Ponadto $f + g = \sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{m} (a_k + b_i) I_{C_{k,j}}$, więc $f + g$ może być przedstawiona jednoznacznie w postaci $\sum\limits_{j=1}^{l} c_j I_{D_j}$, gdzie c_j jest sumą pewnych a_k i b_i, zaś D_j jest sumą zbiorów $C_{k,i}$ dla których $d_j = a_k + b_i$.

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu + \int_X g d\mu &= \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) + \sum_{i=1}^{m} b_i \mu(B_i) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k \cap X) + \sum_{i=1}^{m} b_i \mu(B_i \cap X) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_k \mu(A_k \cap B_i) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_i \mu(A_k \cap B_i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (a_k + b_i) \mu(C_{k,i}) = \sum_{j=1}^{l} d_j \mu(D_j) = \int_X (f+g) d\mu.
\end{aligned}$$

przypadek ii. f, g są funkcjami nieujemnymi. Rozważmy wówczas niemalejące ciągi nieujemnych i Σ-mierzalnych funkcji prostych (p_n) i (q_n) zbieżne odpowiednio do funkcji f i g. Istnienie tych ciągów zagwarantowane jest twierdzeniem o aproksymacji funkcjami prostymi. Oczywiście ciąg $(p_n + q_n)$ jest ciągiem niemalejącym funkcji nieujemnych i Σ-mierzalnych zbieżnym do funkcji $f + g$. Na mocy przypadku i otrzymujemy

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \int_X (p_n + q_n) d\mu = \int_X p_n d\mu + \int_X q_n d\mu.$$

Wykorzystując teraz twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności monotonicznej i własności działań na ciągach liczbowych otrzymujemy tezę w tym przypadku. □

Wniosek 14.1 *Niech A będzie dowolnym zbiorem z Σ.*

Jeżeli f i g są Σ-mierzalnymi funkcjami, nieujemnymi na A, to

$$\int_A (f+g)d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu. \tag{14.2}$$

Jeżeli dodatkowo $f, g \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$, to $f + g \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$.

Dowód. Niech będą spełnione założenia. Wtedy $I_A f$ oraz $I_A g$ są już nieujemne i teza wynika z lematu o określenia całki po zbiorze A. □

Uwaga 14.1 *Następny lemat pozwoli nam nie bać się symboli nieoznaczonych, gdy dodajemy funkcje o wartościach w rozszerzonym zbiorze liczb rzeczywistych w przypadku funkcji całkowalnych. Wykorzystamy fakt, że wartość całki nie zależy o wartości funkcji na zbiorze miary zero, a więc suma funkcji w takim przypadku może być nieokreślona.*

Lemat 14.2 *Niech f będzie dowolną funkcją Σ-mierzalna.*
Jeżeli $f \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$, to f jest μ prawie wszędzie skończona na X.

Dowód. *(ad absurdum)* Niech $B^{\pm} \overset{\text{ozn}}{=} \{x \in X : f(x) = \pm\infty\}$. Wtedy co najmniej jeden ze zbiorów ma miarę niezerową. Przypuśćmy, że jest to zbiór B^+. Ponieważ $f^+ \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$, więc mamy

$$+\infty = \int_{B^+} f^+ d\mu \leqslant \int_X f^+ d\mu < +\infty.$$

Analogicznie otrzymujemy sprzeczność, gdy B^- ma miarę niezerową. □

Wniosek 14.2 *Niech f będzie dowolną funkcją Σ-mierzalna, A dowolnym zbiorem Σ-mierzalnym.*
Jeżeli $f \in \mathfrak{L}(A, \Sigma, \mu)$, to f jest μ prawie wszędzie skończona na A.

Twierdzenie 14.1 *Niech f, g będą dowolnymi funkcjami Σ-mierzalnymi.*
Jeżeli $\{f, g\} \subset \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$, to $f + g \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$ oraz

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \tag{14.3}$$

Dowód.

przypadek i. f jest funkcją nieujemną i g jest funkcją niedodatnią. Niech

$$A^+ \overset{\text{ozn}}{=} \{x \in X : f(x) + g(x) \geqslant 0\} \text{ oraz } A^- \overset{\text{ozn}}{=} \{x \in X : f(x) + g(x) < 0\}.$$

Są one zbiorami Σ-mierzalnymi, rozłącznymi i sumują się do zbioru A. Zgodnie z wnioskiem *12.8* mamy $f, g \in \mathfrak{L}(A^+, \Sigma, \mu) \cap \mathfrak{L}(A^-, \Sigma, \mu)$. Na zbiorze A^+ nieujemne są funkcje $f, f+g, -g$, zaś na zbiorze A^- funkcje $f, -(f+g), -g$. Mamy wtedy

$$\begin{aligned}
\int_{A^+} f d\mu &= \int_{A^+} ((f+g) + (-g)) d\mu = \int_{A^+} (f+g) d\mu + \int_{A^+} (-g) d\mu = \int_{A^+} (f+g) d\mu - \int_{A^+} g d\mu; \\
\int_{A^-} (-g) d\mu &= \int_{A^-} (-(f+g) + f) d\mu = \int_{A^-} (-(f+g)) d\mu + \int_{A^-} f d\mu = -\int_{A^-} (f+g) d\mu + \int_{A^-} f d\mu,
\end{aligned}$$

Wykorzystaliśmy lemat *14.1* oraz lemat *12.8*. Ostatecznie

$$\begin{aligned}
\int_X f d\mu + \int_X g d\mu &= \left(\int_{A^+} f d\mu + \int_{A^+} g d\mu \right) + \left(\int_{A^-} f d\mu + \int_{A^-} g d\mu \right) \\
&= \left(\int_{A^+} (f+g) d\mu - \int_{A^+} g d\mu + \int_{A^+} g d\mu \right) + \left(\int_{A^-} f d\mu + \int_{A^-} (f+g) d\mu - \int_{A^-} f d\mu \right) \\
&= \int_{A^+} (f+g) d\mu + \int_{A^-} (f+g) d\mu = \int_X (f+g) d\mu.
\end{aligned}$$

przypadek ii. f, g są dowolne. Rozbijmy zbiór A na sumę zbiorów rozłącznych

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in A : f(x) \geqslant 0 \wedge g(x) \geqslant 0\} \cup \{x \in A : f(x) \geqslant 0 \wedge g(x) < 0\} \\
&\quad \cup \{x \in A : f(x) < 0 \wedge g(x) \geqslant 0\} \cup \{x \in A : f(x) < 0 \wedge g(x) < 0\}.
\end{aligned}$$

Równość całek na pierwszym ze zbiorów wynika z lematu *14.1*, zaś dla zbiorów drugiego i trzeciego z przypadku i. Natomiast dla zbioru czwartego wystarczy rozważyć funkcje $-f$ i $-g$, które są nieujemne. Dla nich wykorzystać lemat *14.1*. Równość dla funkcji f, g otrzymamy z tego na podstawie lematu *12.8*. □

Twierdzenie 14.2 (Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej) *Niech μ będzie nieujemną miarą zupełną, a ciąg funkcyjny $\{f_n\colon A \to \overline{\mathbb{R}} : n \geqslant 1\}$ będzie ciągiem funkcji Σ-mierzalnych.*

Jeżeli

(i) granica $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ istnieje μ prawie wszędzie na X

(ii) istnieje Σ-mierzalna funkcja g taka, że $g \in \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$ oraz $|f_n| \leqslant g$ μ prawie wszędzie dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$.

Wówczas $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ jest funkcją Σ-mierzalną i $\{\lim\limits_{n\to+\infty} f_n, f_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X (\lim_{n\to+\infty} f_n) d\mu. \tag{14.4}$$

Dowód. Oznaczmy $f \overset{\text{ozn}}{=} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$. Zauważmy, że w punktach, gdzie granica $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ nie istnieje funkcję f można zadać przez dowolną wartość np. przez zero. Funkcja f jest Σ-mierzalna.

Na mocy lematu *13.3* mamy $f_n \in \mathfrak{L}(X,\Sigma,\mu)$, jak również f jest całkowalna na X, gdyż i dla niej zachodzi oszacowanie $|f| \leqslant g$ μ prawie wszędzie. Mamy ponadto na mocy założenia *(ii)*

$$g + f_n \geqslant 0 \text{ oraz } g - f_n \geqslant 0 \text{ dla dowolnego } n \geqslant 1.$$

Do ciągów tych zastosujemy lemat Fatou. Mamy

$$\begin{aligned}
\int\limits_X g d\mu + \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu &= \liminf_{n\to\infty} \left(\int\limits_X g d\mu + \int\limits_X f_n d\mu \right) = \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X (g + f_n) d\mu \\
&\geqslant \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} (g + f_n) d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} (g + f_n) d\mu = \int\limits_X (g + \lim_{n\to\infty} f_n) d\mu \\
&= \int\limits_X g d\mu + \int\limits_X f d\mu
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\int\limits_X g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu &= \int\limits_X g d\mu + \liminf_{n\to\infty} (-\int\limits_X f_n d\mu) = \liminf_{n\to\infty} \left(\int\limits_X g d\mu - \int\limits_X f_n d\mu \right) \\
&= \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X (g - f_n) d\mu \geqslant \int\limits_X \liminf_{n\to\infty} (g - f_n) d\mu = \int\limits_X \lim_{n\to\infty} (g - f_n) d\mu \\
&= \int\limits_X (g - \lim_{n\to\infty} f_n) d\mu = \int\limits_X g d\mu - \int\limits_X f d\mu.
\end{aligned}$$

Ponieważ $0 \leqslant \int\limits_X g d\mu < +\infty$, więc w obu oszacowaniach (po zostawieniu tylko wyrazów skrajnych) można uprościć $\int\limits_X g d\mu$. Otrzymamy wtedy

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \leqslant \int\limits_X f d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu,$$

co zgodnie twierdzeniem o związku granicy i granic dolnej i górnej daje tezę. □

Lemat 14.3 *Niech f będzie dowolną funkcją Σ-mierzalną.*

Jeżeli f jest nieujemna i $\int\limits_X f d\mu = 0$, to $f = 0$ μ prawie wszędzie na X.

Dowód. Niech $A_n \overset{\text{ozn}}{=} \{x \in X : f(x) > \frac{1}{n}\}$ dla dowolnego $n \geqslant 1$. Są one zbiorami mierzalnymi. Mamy ponadto

$$0 = \int\limits_X f d\mu \geqslant \int\limits_{A_n} f d\mu \geqslant \frac{1}{n} \mu(A_n).$$

Stąd $\mu(A_n) = 0$, a ponieważ $\{x \in X : f(x) > 0\} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, więc teza wynika z σ-subaddytywności miary nieujemnej. □

Wniosek 14.3 *Niech f będzie dowolną funkcją Σ-mierzalną, a A zbiorem Σ-mierzalnym.*

Jeżeli f jest nieujemna na A i $\int\limits_A f d\mu = 0$, to $f = 0$ μ prawie wszędzie na A.

Wniosek 14.4 *Niech f będzie dowolną funkcją Σ-mierzalną.*

Jeżeli $f \in \mathfrak{L}(X, \Sigma, \mu)$ oraz $\int\limits_A f d\mu = 0$ dla dowolnego zbioru Σ-mierzalnego A, to $f = 0$ μ prawie wszędzie na X.

Dowód. Niech $B^- \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : f(x) \leqslant 0\}$ i $B^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X : f(x) \geqslant 0\}$. Zbiory $B^\pm$ są Σ-mierzalne oraz $f = f^+$ na B^+ i $f = -f^-$ na B^-. Na mocy wniosku *14.3* otrzymujemy $f^\pm = 0$ na $B^\pm$ μ prawie wszędzie, a stąd f jest μ prawie wszędzie równa zeru. $\square$

Wykład 15

29.01.2008

Dodatek A

do wykładu z dnia 02.10.2007

A.1 Dodatek – twierdzenia i definicje w $\mathcal{E}^d$ będące szczególnymi przypadkami twierdzeń dla przestrzeni metrycznych podanych na wykładzie z Analizy Matematycznej na I roku

Rozpatrujemy $\mathcal{E}^d$ i podzbiór A tej przestrzeni.

Def. A.1 *Kulą otwartą o środku w punkcie $\mathbf{x}_0$ o promieniu $r \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór określony równością*

$$B(\mathbf{x}_0, r) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : d_{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r\right\}. \tag{A.1}$$

Kulą domkniętą ośrodku w punkcie $\mathbf{x}_0$ o promieniu $r \in \mathbb{R}$ nazywamy zbiór określony równością

$$\overline{B(\mathbf{x}_0, r)} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in X : d_{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leqslant r\}. \tag{A.2}$$

Def. A.2 *Zbiór $A \subset \mathbb{R}^d$ nazywamy otwartym w $\mathcal{E}^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\mathbf{x} \in A} \exists_{r>0} B(\mathbf{x}, r) \subset A. \tag{A.3}$$

Zbiór $A \subset \mathbb{R}^d$ nazywamy domkniętym w $\mathcal{E}^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego dopełnienie jest zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^d$.

Def. A.3 *(i) Otoczeniem punktu $\mathbf{x}$ nazywamy dowolny podzbiór $\mathcal{O}_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^d$, dla którego istnieją kula otwarta $B(\mathbf{x}, r)$ o dodatnim promieniu taka, że $B(\mathbf{x}, r) \subset \mathcal{O}_{\mathbf{x}}$.*

(ii) Otoczeniem otwartym punktu $\mathbf{x}$ nazywamy dowolne otoczenie punktu $\mathbf{x}$ będące zbiorem otwartym w $\mathcal{E}^d$.

(iii) Otoczenie $\mathcal{O}_{\mathbf{x}}$ punktu $\mathbf{x}$ bez punktu $\mathbf{x}$ nazywamy sąsiedztwem punktu $\mathbf{x}$ i oznaczamy przez $\mathcal{S}_{\mathbf{x}}$.

(iv) Punkt $\mathbf{x}$ nazywamy punktem wewnętrznym zbioru $A \subset \mathbb{R}^d$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje otoczenie otwarte tego punktu $\mathcal{O}_{\mathbf{x}}$ zawarte w tym zbiorze.

Def. A.4 *Niech $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Przez $(A, d_{\mathcal{E}})$ będziemy rozumieli przestrzeń metryczną z metryką indukowaną z całej przestrzeni. $(A, d_{\mathcal{E}})$ nazywamy podprzestrzenią.*

Mówimy, że zbiór $B \subset A$ jest otwarty (relatywnie otwarty) w przestrzeni $(A, d_{\mathcal{E}})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór otwarty $\mathcal{O}$ w $\mathcal{E}^d$ taki, że $B = A \cap \mathcal{O}$.

Mówimy, że zbiór $B \subset A$ jest domknięty (relatywnie domknięty) w przestrzeni $(A, d_{\mathcal{E}})$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zbiór domknięty $\mathcal{D}$ w $\mathcal{E}^d$ taki, że $B = A \cap \mathcal{D}$.

Def. A.5 *Topologią wyznaczoną przez metrykę $d_{\mathcal{E}}$ nazywamy rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w $\mathcal{E}^d$ i oznaczamy ją $\tau_{\mathcal{E}}$.*

Def. A.6 *Ciąg $(\mathbf{x}_n) \subset \mathbb{R}^d$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists_{\mathbf{x} \in X} \forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geqslant n_0} d_{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) < \varepsilon. \tag{A.4}$$

Ciąg $(\mathbf{x}_n) \subset \mathbb{R}^d$ ma granicę równą $\mathbf{x}_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{n_0 \in \mathbb{N}} \forall_{n \geqslant n_0} d_{\mathcal{E}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n) < \varepsilon. \tag{A.5}$$

Piszemy wtedy $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0$.

Ciąg punktów $(\mathbf{x}_n) \subset \mathbb{R}^d$ *nazywamy ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{\mathbb{N}\ni n,m\geqslant n_0} d_{\mathcal{E}}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_m) < \varepsilon. \tag{A.6}$$

Def. A.7 *Jeżeli w przestrzeni metrycznej* (X, ρ) *każdy ciąg Cauchy'ego ma granicę należącą do* X*, to przestrzeń metryczną* (X, ρ) *nazywamy zupełną.*

Def. A.8 *Domknięciem zbioru* A *w* $\mathcal{E}^d$ *nazywamy najmniejszy zbiór domknięty w* $\mathcal{E}^d$ *zawierający zbiór* A*. Oznaczmy go przez* $\mathrm{Cl}\,(A)$.

Def. A.9 *(i) Punkt* $\mathbf{x}$ *nazywamy punktem skupienia zbioru* A *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{r>0} A \cap (B(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}) \neq \emptyset. \tag{A.7}$$

(ii) Niech $\mathbf{x} \in A$*. Punkt* p *nazywamy punktem izolowanym zbioru* A *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{x}$ *nie jest punktem skupienia tego zbioru tzn.*

$$\exists_{r>0} A \cap (B(\mathbf{x}, r) \setminus \{\mathbf{x}\}) = \emptyset. \tag{A.8}$$

Def. A.10 *Podzbiór* A *nazywamy ciągowo zwartym (zwartym) w* $\mathcal{E}^d$ *wtedy i tylko wtedy, gdy z każdego ciągu punktów z tego zbioru można wybrać podciąg zbieżny, którego granica należy do* A.

Definicja A.1 *Podzbiór* A *przestrzeni metrycznej* $\mathcal{E}^d$ *nazywamy ograniczonym wtedy i tylko wtedy,*

$$\exists_{\mathbf{x}\in A}\exists_{r>0}\forall_{\mathbf{y}\in A} d_{\mathcal{E}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r. \tag{A.9}$$

Twierdz. A.1 *Zbiory* $\emptyset$ *oraz* $\mathbb{R}^d$ *są otwarte w* $\mathcal{E}^d$.

Twierdz. A.2 *Zbiory* $\emptyset$ *oraz* $\mathbb{R}^d$ *są domknięte w* $\mathcal{E}^d$.

Twierdz. A.3 *Kula otwarta w* $\mathcal{E}^d$ *jest zbiorem otwartym w* $\mathcal{E}^d$.

Twierdz. A.4 *Kula domknieta w* $\mathcal{E}^d$ *jest zbiorem domkniętym w* $\mathcal{E}^d$.

Twierdz. A.5 *(i) Dla dowolnej rodziny* $\{A_i : i \in \mathfrak{I}\} \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ *zbiorów otwartych w* $\mathcal{E}^d$ *zbiór* $\bigcup_{i\in\mathfrak{I}} A_i$ *jest otwarty w* $\mathcal{E}^d$.

(ii) Dla dowolnej skończonej rodziny $\{A_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ *zbiorów otwartych w* $\mathcal{E}^d$ *zbiór* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ *jest otwarty w* $\mathcal{E}^d$.

Twierdz. A.6 *(i) Dla dowolnej rodziny* $\{A_i : i \in \mathfrak{I}\} \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ *zbiorów domkniętych w* $\mathcal{E}^d$ *zbiór* $\bigcap_{i\in\mathfrak{I}} A_i$ *jest domknięty w* $\mathcal{E}^d$.

(ii) Dla dowolnej skończonej rodziny $\{A_i : 1 \leqslant i \leqslant n\} \subset 2^{\mathbb{R}^d}$ *zbiorów domkniętych w* $\mathcal{E}^d$ *zbiór* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *jest domknięty w* $\mathcal{E}^d$.

Twierdz. A.7 *Dla dowolnych dwóch różnych punktów* p *i* q *przestrzeni metrycznej* $\mathcal{E}^d$ *istnieją zbiory* $\mathcal{O}_p$ *i* $\mathcal{O}_q$ *otwarte w* $\mathcal{E}^d$ *takie, że*

$$p \in \mathcal{O}_p \wedge q \in \mathcal{O}_q \wedge \mathcal{O}_p \cap \mathcal{O}_q = \emptyset. \tag{A.10}$$

Twierdz. A.8 *Każdy punkt zbioru otwartego w* $\mathcal{E}^d$ *jest punktem wewnętrznym.*

Twierdz. A.9 *Zbiór jednopunktowy jest zbiorem domkniętym w* $\mathcal{E}^d$.

Twierdz. A.10 *Niech dany będzie zbieżny ciąg punktów* $(\mathbf{x}_n) \subset \mathbb{R}^d$*. Niech ponadto* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n =$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{q}$*. Wtedy* $\mathbf{p} = \mathbf{q}$.

Twierdz. A.11 *Zbiór jest domknięty w* $\mathcal{E}^d$ *wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbieżnego ciągu punktów tego zbioru jego granica należy do tego zbioru.*

Twierdz. A.12 *Jeżeli* $A \neq \emptyset$ *jest domknięty* $\mathcal{E}^d$*, to* $(A, d_{\mathcal{E}})$ *jest przestrzenią metryczną zupełną.*

Twierdz. A.13 *Domknięcie zbioru domkniętego w $\mathcal{E}^d$ jest tym samym zbiorem.*

Twierdz. A.14 *Jeżeli p jest punktem skupienia zbioru $A \subset \mathcal{E}^d$, to dowolne otoczenie punktu p zawiera nieskończenie wiele punktów ze zbioru A.*

Twierdz. A.15 *Niech A będzie podzbiorem $\mathcal{E}^d$, zaś $\tilde{A}$ będzie zbiorem jego punktów skupienia. Zbiór przestrzeni metryczne $\mathcal{E}^d$ jest domknięty w tej przestrzeni wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{A} \subseteq A$.*

Twierdz. A.16 *Niech A będzie podzbiorem $\mathcal{E}^d$, zaś $\tilde{A}$ będzie zbiorem jego punktów skupienia. Wtedy $\mathrm{Cl}\, A = A \cup \tilde{A}$.*

Twierdz. A.17 *Niech $\mathcal{E}^d \supset K$ będzie ciągowo zwarty w $\mathcal{E}^d$, a A będzie zbiorem domkniętym w $\mathcal{E}^d$ i $A \subset K$ wtedy A jest ciągowo zwarty w $\mathcal{E}^d$.*

A.2 Uogólnienia – przestrzeń unitarna i przestrzeń unormowana

Niech X będzie zbiorem niepustym, K ciałem liczbowym[1], zaś $(X, +, \cdot, \Theta, K)$ będzie przestrzenią wektorową nad ciałem K.

UDefinicja A.1 *Odwzorowanie $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ nazywamy pseudonormą (quasi - normą) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y\in X} \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \tag{A.11}$$

$$\forall_{x\in X}\forall_{a\in K} \|ax\| = |a|\|x\|. \tag{A.12}$$

Jeżeli ponadto zachodzi

$$\forall_{x\in X} \|x\| = 0 \Rightarrow x = \Theta, \tag{A.13}$$

to takie odwzorowanie nazywamy normą, a parę $(X, \|\cdot\|)$ przestrzenią unormowaną.

UWniosek A.1 *Jeżeli $x = \Theta$, to $\|x\| = 0$.*

UTwierdzenie A.1 *Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Wówczas odwzorowanie*

$$X \times X \ni (x,y) \mapsto d_{\|\cdot\|}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x-y\| \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \tag{A.14}$$

jest metryką w X. Nazywamy ją metryką generowaną (indukowaną) przez normę.

UDefinicja A.2 *Przestrzeń unormowaną nazywamy przestrzenią Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy $(X, d_{\|\cdot\|})$ jest przestrzeń metryczną zupełną.*

UDefinicja A.3 *Odwzorowanie[2] $(\cdot|\cdot)\colon X \times X \to K$ nazywamy iloczynem skalarnym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y,z\in X} (x+y|z) = (x|z) + (y|z) \tag{A.15}$$

$$\forall_{x,y\in X}\forall_{a\in K} (ax|y) = a(x|y) \tag{A.16}$$

$$\forall_{x,y\in X} (x|y) = \overline{(y|x)} \tag{A.17}$$

$$\forall_{x\in X} x \neq 0 \Rightarrow (x|x) > 0 \tag{A.18}$$

a parę $(X, (\cdot|\cdot))$ nazywamy przestrzenią unitarną.

UTwierdzenie A.2 *Niech $(X, (\cdot|\cdot))$ będzie przestrzenią unitarną. Wówczas odwzorowanie*

$$X \ni x \mapsto \|x\|_s \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(x|x)} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \tag{A.19}$$

jest normą (generowaną przez iloczyn skalarny), natomiast

$$X \times X \ni (x,y) \mapsto d_s(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \|x-y\|_s \equiv \sqrt{(x-y|x-y)} \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \tag{A.20}$$

jest metryką. Nazywamy ją metryką generowaną (indukowaną) przez iloczyn skalarny.

[1] $K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$

[2] W tym przypadku milcząco zakładamy, że $K = \mathbb{C}$. Można jednak mówić o iloczynie skalarnym jako o odwzorowaniu wyłącznie w $\mathbb{R}$.

ULemat A.1 (Nierówność Schwarza) *Niech* $(X, (\cdot|\cdot))$ *będzie przestrzenią unitarną. Dla dowolnych* $x, y \in X$ *mamy*

$$|(x|y)| \leqslant \|x\|_s \|y\|_s. \tag{A.21}$$

UDefinicja A.4 *Przestrzeń unitarną* $(X, (\cdot|\cdot))$ *nazywamy przestrzenią Hilberta wtedy i tylko wtedy, gdy* (X, d_s) *jest przestrzeń metryczną zupełną.*

UPrzykład A.1 *Niech* $X = \mathbb{R}^2$*. Określmy*

$$\forall_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2} ((x_1, y_1)|(x_2, y_2)) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 x_2 + y_1 y_2. \tag{A.22}$$

Wówczas jest to iloczyn skalarny, generujący metrykę euklidesową. Nie indukuje on jednak metryki miasto[3]*, chociaż obie metryki są równoważne.*

UWniosek A.2 *Przestrzeń Hilberta (unitarna) jest przestrzenią Banacha (unormowaną).*

UTwierdzenie A.3 *Niech dana będzie przestrzeń unormowana* $(X, \|\cdot\|)$*. Wówczas norma* $\|\cdot\|$ *pochodzi od iloczynu skalarnego w* X *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi tożsamość równoległoboku tzn. dla dowolnych* $x, y \in X$ *mamy*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

UTwierdzenie A.4 *Niech dana będzie przestrzeń wektorowa* $(X, +, \cdot, \Theta, K)$*, na której dana jest metryka* d*. Wówczas metryka pochodzi od normy określonej na tej przestrzeni wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są warunki*

$$\forall_{x,y,z\in X} d(x, z) = d(x + z, y + z) \tag{A.23}$$

$$\forall_{x,y\in X} \forall_{t\in K} d(tx, ty) = |t| d(x, y). \tag{A.24}$$

[3]Metryka miasto określona jest następująco $d_m((x_1, y_1), (x_2, y_2) \stackrel{\text{def}}{=} |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Dodatek B

do wykładu z dnia 09.10.2007

B.1 Dodatek – definicja i twierdzenia dla granicy funkcji o wartościach, bądź dziedzinie i wartościach w przestrzeniach euklidesowych (szczególne przypadkami dla przestrzeni metrycznych podanych na wykładzie z Analizy Matematycznej na I roku)

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną.

Def. B.1 *Mówimy, że (X, ρ) jest przestrzenią metryczną spójną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{A,B \in \tau(d)} X = A \cup B \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset. \tag{B.1}$$

Def. B.2 *Zbiory A i B przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy oddzielonymi (rozgraniczonymi) w (X, ρ) wtedy i tylko wtedy gdy*

$$(A \cap \operatorname{Cl}(B)) \cup (\operatorname{Cl}(A) \cap B) = \emptyset. \tag{B.2}$$

Twierdz. B.1 *Przestrzeń metryczna (X, ρ) jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{A,B \subset X} (\operatorname{Cl}(A) \cap B) \cup (A \cap \operatorname{Cl}(B)) = \emptyset \wedge X = A \cup B \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset. \tag{B.3}$$

Def. B.3 *Zbiór $\mathcal{A}$ przestrzeni metrycznej (X, ρ) nazywamy spójnym w (X, ρ) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{A,B \subset \mathcal{A}} (\operatorname{Cl}(A) \cap B) \cup (A \cap \operatorname{Cl}(B)) = \emptyset \wedge \mathcal{A} = A \cup B \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset. \tag{B.4}$$

Wn. B.1 *Zbiór A przestrzeni metrycznej (X, ρ) jest spójnym w (X, ρ) wtedy i tylko wtedy, gdy (A, ρ) jest przestrzenią spójną.*

Niech d będzie liczbą naturalną, $(X, \rho) \equiv \mathcal{E}^r$, gdzie r jest liczbą naturalną większą od 1, A będzie niepustym podzbiorem X, p będzie dowolnym punktem (X, ρ) będącym punktem skupienia zbioru A, $\mathbf{q}$ elementem $\mathbb{R}^d$, a $f\colon A \to \mathbb{R}^d$. Rozpatrujemy $\mathcal{E}^d$.

Def. B.4 *Będziemy mówili, że odwzorowanie f ma granicę w punkcie p równą $\mathbf{q}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia jeden z warunków*

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \forall_{x \in A} 0 < \rho(p, x) < \delta \Rightarrow d_{\mathcal{E}}(\mathbf{q}, f(x)) < \varepsilon; \tag{B.5}$$

$$\forall_{(p_n) \subset A \setminus \{p\}} \lim_{n\to\infty} p_n = p \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(p_n) = \mathbf{q}. \tag{B.6}$$

Zapisujemy wtedy $\lim\limits_{x\to p} f(x) = q$.

Twierdz. B.2 *Obie warunki definiujące granicę odwzorowania w punkcie są równoważne.*

Wn. B.2 (twierdzenie o jednoznaczności granicy funkcji w punkcie) *Jeżeli funkcja f ma granicę w punkcie p, to tylko jedną.*

B.2 Uogólnienia – przestrzeń łukowo spójna

Dodatek C

do wykładu z dnia 18.10.2007

C.1 Dodatek – definicja i twierdzenia dla funkcji ciągłych o wartościach, bądź dziedzinie i wartościach w przestrzeniach euklidesowych (szczególne przypadkami dla przestrzeni metrycznych podanych na wykładzie z Analizy Matematycznej na I roku)

Niech d będzie liczbą naturalną, (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną, p będzie dowolnym punktem przestrzeni metrycznej (X, ρ), A niepustym podzbiorem X, q elementem $\mathbb{R}^d$, a $f\colon X \to \mathbb{R}^d$. Rozpatrujemy $\mathcal{E}^d$.

Def. C.1 *Mówimy, że odwzorowanie f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\mathcal{O}\in\tau_{\mathcal{E}}} f^{-1}(\mathcal{O}) \in \tau(\rho). \tag{C.1}$$

Def. C.2 (otoczeniowa) *Mówimy, że odwzorowanie f jest ciągłe w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego otoczenia $\mathcal{O}$ punktu f(p) zbiór $f^{-1}(\mathcal{O})$ jest otoczeniem punktu p.*

Wn. C.1 *Odwzorowanie f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru domkniętego w $\mathcal{E}^d$ jego przeciwobraz jest domknięty w (X, ρ)*

Wn. C.2 (warunki równoważne ciągłości odwzorowania w punkcie) *Następujące warunki są równoważne:*
(i) f jest ciągłe w punkcie p;
(ii) dla dowolnego otoczenia $\mathcal{O}_{f(p)}$ punktu $f(p)$ istnieje otoczenie $\mathcal{O}_p$ punktu p takie, że $f(\mathcal{O}_p) \subset \mathcal{O}_{f(p)}$;
*(iii) (**Warunek Cauchy'ego**)*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in X}\,\rho(p,x) < \delta \Rightarrow d_{\mathcal{E}}(f(p), f(x)) < \varepsilon; \tag{C.2}$$

*(iv) (**Warunek Heinego**)*

$$\forall_{(p_n)\subset X} \lim_{n\to\infty} p_n = p \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p). \tag{C.3}$$

Twierdz. C.1 *Odwzorowanie f jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągłe w każdym punkcie.*

Wn. C.3 *Jeżeli punkt p jest punktem izolowanym podzbioru X, to odwzorowanie f jest zawsze ciągłe w tym punkcie.*

Wn. C.4 *Odwzorowanie identycznościowe $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jest ciągłe.*

Wn. C.5 *Odwzorowanie stałe jest ciągłe.*

Twierdz. C.2 *Niech A będzie dowolnym niepustym podzbiorem przestrzeni metrycznej (X, ρ), p będzie dowolnym punktem ze zbioru A będącym jednocześnie punktem skupienia zbioru A, $f\colon A \to \mathbb{R}^d$ dowolnym odwzorowaniem. Wtedy f jest ciągłe w punkcie p wtedy i tylko wtedy, gdy*
(i) istnieje granica odwzorowania f w punkcie p,
(ii) granica odwzorowania f w punkcie p jest równa wartości w tym punkcie.

Twierdz. C.3 *Złożenie odwzorowań ciągłych jest odwzorowaniem ciągłym tzn. Jeżeli* $(X, d_X), (Y, d_Y)$ *są dowolnymi przestrzeniami metrycznymi,* $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to \mathbb{R}^d$ *dowolnymi odwzorowaniami ciągłymi, to odwzorowanie* $g \circ f\colon X \to \mathbb{R}^d$ *jest ciągłe.*

Def. C.3 *Mówimy, że odwzorowanie f jest jednostajnie ciągłe na zbiorze A wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x,y\in A}\rho(x,y) < \delta \Rightarrow d_{\mathcal{E}}(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{C.4}$$

Def. C.4 *Mówimy, że odwzorowanie f spełnia warunek Lipschitza na zbiorze A ze stałą* $L \geqslant 0$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y\in A} d_{\mathcal{E}}(f(x), f(y)) \leqslant L\rho(x,y). \tag{C.5}$$

Twierdz. C.4 *Jeżeli odwzorowanie f jest jednostajnie ciągłe na zbiorze A, to jest ciągłe na tym zbiorze.*

Twierdz. C.5 *Jeżeli odwzorowanie f funkcja spełnia warunek Lipschitza z pewną stała, to jest jednostajnie ciągła, w więc ciągła.*

Def. C.5 *Odwzorowanie f nazywamy ograniczonym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\exists_{x_0\in\mathbb{R}^d}\exists_{r>0} f(X) \subseteq B(x_0, r). \tag{C.6}$$

Wn. C.6 *Jeżeli f jest odwzorowaniem ciągłym, a* (X,ρ), *to odwzorowanie f jest ograniczone.*

Twierdz. C.6 *Niech* (X, ρ) *będzie przestrzenią metryczną zwartą oraz* $f\colon X \to \mathbb{R}^d$ *ciągłą bijekcją. Wtedy* f^{-1} *jest ciągłe.*

Twierdz. C.7 *Jeżeli A jest niepustym podzbiorem zwartym przestrzeni metrycznej* (X, ρ), *zaś* $f\colon A \to \mathbb{R}^d$ *jest różnowartościowym odwzorowaniem ciągłym, to wtedy* $f^{-1}\colon f(A) \to A$ *jest ciągłe.*

Twierdz. C.8 *Jeżeli przestrzeń metryczna* (X, ρ) *jest spójna, a f jest odwzorowaniem ciągłym, to zbiór wartości* $f(X)$ *jest zbiorem spójnym w* $\mathcal{E}^d$.

C.2 Uogólnienia – odwzorowania liniowe w przestrzeniach wektorowych

UDefinicja C.1 *Niech* $(X_i, +_i, \cdot_i, \Theta_i)$ *będą przestrzeniami wektorowymi nad tym samym ciałem dla* $i = 1, 2$. *Odwzorowanie* $L\colon X_1 \to X_2$ *nazywamy liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych* x, y *z* X_1 *oraz dowolnego* α *z* K *spełnione są warunki*

$$L(x +_1 y) = L(x) +_2 L(y). \tag{C.7}$$

$$L(\alpha \cdot_1 x) = \alpha \cdot_2 L(x). \tag{C.8}$$

UUwaga C.1 *Zbiór wszystkich ograniczonych odwzorowań liniowych z* X_1 *w* X_2 *oznaczamy* $L(X_1, X_2)$, *Jest to przestrzeń liniowa z działaniami określonymi następująco dla dowolnych* $x \in X_1$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$, $L, L_1, L_2 \in L(X_1, X_2)$ *mamy:*

$$(\alpha L)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(Lx)$$
$$(L_1 + L_2)(x) \stackrel{\text{def}}{=} L_1(x) + L_2(x).$$

Jest ona nawet unormowana, o ile w przestrzeniach wektorowych były zadane normy.

UUwaga C.2 *Wartość odwzorowania liniowego L w punkcie x oznaczamy Lx.*

UUwaga C.3 *Jeżeli przestrzenie liniowe są skończenie wymiarowe, to odwzorowanie liniowe można utożsamić z macierzą (w pewnych bazach).*

Dodatek D

do wykładu z dnia 06.11.2007

D.1 Uogólnienia – odwzorowania liniowe ciągłe w przestrzeniach wektorowych c.d.

Niech $(X_i, \|\cdot\|_i)$ będą przestrzeniami unormowanymi nad $\mathbb{R}$ dla $i = 1, 2$.

UUwaga D.1 *Zgodnie z uwaga C.1 przestrzeń $L(X_1, X_2)$ jest przestrzenią unormowaną.*

UTwierdzenie D.1 *Niech $(X_i, \|\cdot\|_i)$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{R}$ dla $i = 1, 2$, a $L\colon X_1 \to X_2$ będzie odwzorowaniem liniowym.*

Następujące warunki są równoważne:
(i) L jest ciągłe w pewnym punkcie;
(ii) L jest ograniczone;
(iii) L jest ciągłe w każdym punkcie.

W dalszych naszych rozważaniach będziemy zakładali, że $(X_i, \|\cdot\|_i)$ będą przestrzeniami Banacha nad $\mathbb{R}$ dla $i = 1, 2$, a $L\colon X_1 \to X_2$ będzie odwzorowaniem liniowym ograniczonym.

UDefinicja D.1 *Niech $L \in L(X_1, X_2)$. Normę odwzorowania L (oznaczaną $\|L\|$) definiujemy jako*

$$\inf\{A > 0 : \|Lx\|_2 \leqslant A\|x\|_1\}.$$

ULemat D.1 *Niech $L \in L(X_1, X_2)$. Wtedy*

$$\|L\| = \sup\{\|Lx\|_2 : x \in X_1 \wedge \|x\|_1 \leqslant 1\}.$$

ULemat D.2 *$(L(X_1, X_2), \|\cdot\|)$ jest przestrzenią Banacha.*

Dodatek E

do wykładu z dnia 18.12.2007

E.1 Dodatek – σ-ciał, miara nieujemna i miara zewnętrzna, funkcje mierzalne

Niech X będzie niepustym zbiorem, zaś $\mathcal{H}$ rodziną jego podzbiorów tzn. $\mathcal{H} \subset 2^X$.

Def. E.1 *Rodzinę zbiorów $\mathcal{H}$ nazywamy półpierścieniem zbiorów wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\mathcal{H} \neq \emptyset \tag{E.1}$$

$$\forall_{A,B\in\mathcal{H}} A \cap B \in \mathcal{H}; \tag{E.2}$$

$$\forall_{A,B\in\mathcal{H}} \exists_n \exists_{C_1,\dots,C_n\subset\mathcal{H}} (\forall_{1\leqslant i<j\leqslant n} C_i \cap C_j = \emptyset) \Rightarrow A \setminus B = \bigcup_{i=1}^{n} C_i. \tag{E.3}$$

Def. E.2 *Rodzinę zbiorów $\mathcal{H}$ nazywamy σ-ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$X \in \mathcal{H}; \tag{E.4}$$

$$\forall_{\{A_n:n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{H}} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{H}; \tag{E.5}$$

$$\forall_{A,B\in\mathcal{H}} A \setminus B \in \mathcal{H}. \tag{E.6}$$

Def. E.3 *Niech $\mathcal{H}$ będzie półpierścieniem Każdą funkcję $\mu\colon \mathcal{H} \to [0,+\infty]$ spełniającą warunki*

$$\forall_{\{A_n:n\geqslant 1\}\subset\mathcal{H}} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{H} \wedge (\forall_{i,j\in\mathbb{N}\wedge i\neq j} A_i \cap A_j = \emptyset) \Rightarrow \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n); \tag{E.7}$$

$$\mu(\emptyset) = 0. \tag{E.8}$$

nazywamy miarą nieujemną.

Def. E.4 *Niech $\mathcal{H}$ będzie σ-ciałem. Wtedy parę $(X,\mathcal{H})$ nazywamy przestrzenią mierzalną. Jeżeli dodatkowo na $\mathcal{H}$ określona jest miara nieujemna μ, to trójkę $(X,\mathcal{H},\mu)$ nazywamy przestrzenią z miarą nieujemną.*

Def. E.5 *Funkcję zbioru $\nu\colon 2^X \to [0,+\infty]$ nazywamy miarą zewnętrzną wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\nu(\emptyset) = 0; \tag{E.9}$$

$$\forall_{\{A_n:n\geqslant 1\}\subset 2^X} \forall_{A\in 2^X} A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \Rightarrow \nu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n). \tag{E.10}$$

Def. E.6 *Niech A będzie dowolnym podzbiorem X. Mówimy, że A jest zbiorem ν-mierzalnym wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{B\subset X} \nu(B) = \nu(B \cap A) + \nu(B \setminus A). \tag{E.11}$$

Twierdz. E.1 (Caratheodory'ego) *Niech ν będzie miarą zewnętrzną na 2^X i $\mathcal{S}$ będzie rodziną zbiorów ν-mierzalnych. Wówczas rodzina $\mathcal{S}$ jest σ - ciałem oraz ν obcięta do $\mathcal{S}$ jest miarą nieujemną. Ponadto spełnia on warunek*

$$\forall_{A\in\mathcal{S}}\forall_{C\subset A}\nu(A) = 0 \Rightarrow C \in \mathcal{S} \wedge \nu(C) = 0. \tag{E.12}$$

Twierdz. E.2 *Niech $\mathcal{H}$ będzie półpierścieniem, zaś μ miarą nieujemną zadaną na tym półpierścieniu. Dla dowolnego podzbioru A zbioru X określmy rodzinę wszystkich przeliczalnych pokryć tego zbioru elementami z $\mathcal{H}$ tzn.*

$$\mathcal{P}(A) \overset{\text{ozn}}{=} \{\{A_n : n \geqslant 1\} \subset \mathcal{H} : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}.$$

Wtedy funkcja zbioru

$$2^X \ni A \mapsto \mu^\star(A) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \inf\left\{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) : \{A_n : n \geqslant 1\} \in \mathcal{P}(A)\right\} & \textit{jeżeli } \mathcal{P}(A) \neq \emptyset \\ +\infty & \textit{jeżeli } \mathcal{P}(A) = \emptyset \end{cases} \tag{E.13}$$

jest miarą zewnętrzną na X.

Niech (X, Σ, μ) będzie przestrzenią z miarą nieujemną, a $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ dowolnym odwzorowaniem

Def. E.7 *Mówimy, że funkcja f jest Σ-mierzalna (Σ-mierzalna sensie Lebesgue'a) wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} \{x \in X : f(x) < a\} \in \Sigma. \tag{E.14}$$

Twierdz. E.3 (o aproksymacji funkcjami prostymi) *Niech funkcja f będzie funkcją nieujemną mogącą przyjmować wartość plus nieskończoność. Wówczas f jest Σ-mierzalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niemalejący ciąg nieujemnych funkcji prostych Σ-mierzalnych zbieżnych punktowo do funkcji f.*

Ponadto jeżeli funkcja f jest ograniczona, to ciąg funkcji prostych jest zbieżny jednostajnie.

Bibliografia

[1] A. Birkholc. *Analiza matematyczna. Funkcje wielu zmiennych.* PWN, Warszawa, 1990.

[2] W. Kołodziej. *Analiza matematyczna.* Matematyka dla Politechnik. PWN, Warszawa, 1979.

[3] K. Maurin. *Analiza. Elementy*, volume 69 of *Biblioteka Matematyczna.* PWN, Warszawa, 1991.

[4] W. Rudin. *Podstawy analizy matematycznej.* PWN, Warszawa, 1982.