Lista zadania nr 4

Metody probabilistyczne i statystyka

studia I stopnia – informatyka (rok 2)

Wydziału Ekonomiczno-Informatycznego

Filia UwB w Wilnie

Jarosław Kotowicz
Instytut Matematyki Uniwersytet w Białymstoku

17 stycznia 2009

Prawdopodobieństwo geometryczne.

1. Odcinek $[0, 1]$ jest w sposób losowy dzielony na dwie części. Część dłuższą znów w sposób losowy dzielona jest na dwie części. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że z tak otrzymanych trzech odcinków da się zbudować trójkąt.
2. **Problem Buffone'a.** Płaszczyzna jest pokryta prostymi równoległymi w odstępach równych a. Na tą płaszczyznę rzucamy igłę o długości $l, l < a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie jedną z prostych ?
3. Na układ prostych równoległych odległych o d jednostek rzucamy monetę o promieniu r takim, że $2r < d$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta nie przetnie żadnej z tych prostych.
4. Monetę o promieniu r rzucamy na parkiet utworzony z przystających kwadratów o boku $2a$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta przykryje przynajmniej dwa kwadraty, jeśli $r < a$.
5. Na stół podzielony na równe prostokątne trójkąty równoramienne o ramionach równych a, pada moneta o promieniu r. Obliczyć prawdopodobieństwo, że moneta nie przetnie żadnego boku trójkąta. Podać warunek na r.
6. Dwaj studenci umówili się na przystanku tramwajowym miedzy godziną 13.00, a 14.00. Każdy z nich od momentu przyjścia miał czekać tylko 15 minut. Obliczyć prawdopodobieństwo, że studenci się spotkają.
7. Dwaj studenci umówili się na spotkanie na przystanku autobusowym między godzinami 12.00, a 13.00. Każdy z nich po przyjściu będzie czekał dokładnie 12 minut. Obliczyć prawdopodobieństwo, tego że obydwaj się spotkają, jeśli przyjście każdego z nich o danej godzinie jest jednakowo możliwe i niezależne od przyjścia drugiego.
8. W dany kwadrat o boku $2a$ wpisujemy koło, a następnie w koło kolejny kwadrat. Wybieramy losowo punkt z większego kwadratu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wybrany punkt należy do kwadratu mniejszego.
9. W kwadrat o boku a wpisano koło, a następnie w te koło wpisano kwadrat. Wybieramy losowo punkt z większego kwadratu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że punkt będzie należał do koła i nie będzie należał do mniejszego kwadratu.
10. **Paradoks Bertranda.** W sposób losowy kreślimy cięciwę okręgu. Obliczyć prawdopodobieństwo, że cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta równoramiennego wpisanego w koło ograniczone danym okręgiem.
11. Nieskończona prostokątna krata składa się z prętów w kształcie walca o promienie r. Odległości między osiami równoległych walców wynoszą odpowiednia a i b. Obliczyć prawdopodobieństwo trafienia kulą o średnicy d w kratę w jednym rzucie, jeśli trajektoria lotu kuli jest prostopadła do płaszczyzny kraty.
12. W koło o promieniu r wpisano trójkąt równoboczny, a w trójkąt kolejne koło. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losując trzy punkty z większego koła dokładnie jeden trafi do mniejszego koła, drugi do trójkąta i nie trafi do wpisanego koła.
13. W koło o promieniu 1 wpisano trójkąt równoboczny. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany punkt z koła należy do trójkąta.
14. *W trzech następnych zadaniach mamy* $\Omega = [0, 1], P$ *jest miarą Lebesgue'a na* $[0, 1]$ *tj. jest długość.* Podać przykład zdarzeń niezależnych A_1, A_2 takich, że $P(A_1) = P(A_2) = \frac{2}{3}$.
15. Podać przykład zdarzeń niezależnych A_1, A_2, A_3 takich, że $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$.
16. Podać przykład zdarzeń niezależnych $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takich, że $P(A_1) = P(A_2) = \ldots = P(A_3) = \frac{1}{2}$.
17. Z kwadratu $[0, 1]\times[0, 1]$ losowany jest punkt (x, y). Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że $\mid x-y \mid< r, 0 < r < 1$.
18. W kwadrat o boku a wpisano koło. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszystkie n losowo wybrane punkty z kwadratu należą do koła.
19. Z odcinka $[0, L]$ losujemy niezależnie N liczb. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że n spośród tych liczb będzie z odcinka $(a, b) \subseteq [0, L], 0 \leqslant n \leqslant N$.
20. Z kuli o promieniu R wylosowano N punktów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że odległość od środka kuli do najbliżej położonego punktu jest większa lub równa $a, 0 < a < R$.

21. W koło wpisany jest kwadrat. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z pięciu punktów rozmieszczonych losowo w kole jeden znajdzie się w kwadracie, a pozostałe po jednym w każdym z czterech wycinków koła.

22. Z odcinka (a, b) losowanych jest niezależnie n punktów. W odcinku tym zawarte są rozłączne odcinki $(c_1, d_1), (c_2, d_2)$. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że dokładnie k_1 punktów będzie należało do (c_1, d_1), a k_2 do (c_2, d_2), jeśli $0 \leqslant k_1 + k_2 \leqslant n$.

23. Z odcinka $[0, 1]$ wybieramy niezależnie dwie liczby x, y. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z odcinków o długości $1, x, y$ można zbudować trójkąt.

24. W każdym spośród n niezależnych doświadczeń obserwuje się wartości zmiennej losowej X o rozkładzie równomiernym na odcinku $[0, L]$. Wyznaczyć prawdopodobieństwo zaobserwowania chociaż jednej wartości w odcinku $(a, b) \subseteq [0, L]$, jeżeli wiadomo, że wszystkie wartości n leżą w przedziale $(c, d), (a, b) \subseteq (c, d) \subseteq [0, L]$.

25. Zmienna losowa X posiada rozkład skoncentrowany na odcinku $(a, b]$. Wykonywanych jest n niezależnych doświadczeń. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że w k doświadczeniach wartości X będą z przedział (a, c), a pozostałych $n - k$ doświadczeń wartości X będą z przedziału $[c, d], 0 \leqslant k < n$.

Zmienna losowa.

1. Z kwadratu o boku a losowane są dwa wierzchołki. Wartością zmiennej losowej X jest długość odcinka łączącego te wierzchołki. Wyznaczyć rozkład X.

2. Z sześcianu o krawędzi a losowane są trzy wierzchołki. Wartością zmiennej losowej X jest pole trójkąta wyznaczonego przez te wierzchołki, którego wierzchołkami są one. Wyznaczyć rozkład X.

3. Z kwadratu o boku a losowany jest punkt. Wartością zmiennej losowej X jest odległość od najbliższego boku. Wyznaczyć rozkład X.

4. Losujemy punkt z trójkąta równobocznego o boku a. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego boku. Podać rozkład zmiennej losowej.

5. Dany jest prostokąt o bokach a, b, gdzie $a < b$. Z prostokąta losujemy punkt. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równy odległości punktu od najbliższego dłuższego boku. Podać rozkład zmiennej losowej.

6. Dany jest prostokąt $[0, 2] \times [0, 4]$. Z prostokąta losujemy punkt. zmienna losowa X przyjmuje wartości równe odległości punktu od najbliższego dłuższego boku. Podać rozkład zmiennej losowej.

7. Dane są dwa koła współśrodkowe o promieniach 1 i 2. Z większego koła losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od mniejszego z okręgów Podać rozkład zmiennej losowej.

8. Z okręgu o promieniu 1 losujemy dwa punkty P, Q. Wartością zmiennej losowej jest długość mniejszego łuku. Wyznaczyć rozkład X.

9. Z koła o promieniach 2 losujemy punkt. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe odległości punktu od brzegu koła. Podać rozkład zmiennej losowej.

10. Z odcinka $[0, L]$ losowane są w sposób niezależny dwie liczby x_1, x_2. Wartością zmiennej losowej X jest liczba 1, jeżeli liczba $r \in [0, L]$ leży pomiędzy punktami x_1, x_2 i 0 w przeciwnym wypadku. Wyznaczyć rozkład X.

11. A jest zdarzeniem losowym, które można zaobserwować w pojedynczym doświadczeniu $P(A) = p > 0$. Doświadczenia są w sposób niezależny wykonywane do tego momentu, kiedy A zostanie zaobserwowane po raz pierwszy. Wartością zmiennej losowej X jest numer tego doświadczenia kiedy A zostało zaobserwowane pierwszy raz (lub kiedy zostały przerwane próby). Wyznaczyć rozkład X.

12. Z pęku n kluczy wybierany jest jeden i pasowany do zamka. Klucz, który nie pasuje jest odkładany, a z pozostałych jest losowany kolejny klucz. Wartością zmiennej losowej X jest numer tej próby, w której klucz pasuje do zamka. Wiadomo, że tylko jeden klucz otwiera zamek. Wyznaczyć rozkład X.

13. Z kwadratu $[0,1] \times [0,1]$ losowany jest punkt (x, y). Wyznaczyć rozkłady zmiennych losowych $X = \min\{x, y\}, Y = \max\{x, y\}$.

14. Rzucamy raz symetryczną monetą. Zdarzeniu *wypadł orzeł* przyporządkowujemy liczbę 2, a *wypadła reszka* liczbę -1. Podać rozkład zmiennej losowej.

15. Rzucamy dwoma symetrycznymi monetami. Zdarzeniu *wypadły dwie reszki* przyporządkowujemy liczbę 5, *wypadły różne wyniki* liczbę -3, zaś *wypadły dwa orły* liczbę 1. Podać rozkład zmiennej losowej.

16. Rzucamy pięcioma symetrycznymi monetami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wyrzuconych orłów. Podać rozkład zmiennej losowej.

17. Rzucamy dwoma kostkami. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek na obu kostkach. Podać rozkład zmiennej losowej.

18. Dokonujemy 10 jednakowych prób, które są niezależne. W każdej z prób może pojawić się zdarzenie A z prawdopodobieństwem $p, (0 < p < 1)$. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wystąpień zdarzenia A. Znaleźć rozkład zmiennej losowej.

19. W urnie znajdują się 4 kule białe i 4 czarne. Losujemy z urny jednocześnie 4 kule. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe ilości wylosowanych kul czarnych. Podać rozkład zmiennej losowej.

20. Rzucamy dwiema kostkami do gry. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podać jej rozkład.

21. Rzucamy kostką do gry i czworościanem na ścianach którego są liczby 0,0,1,2. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe

    - sumie;
    - iloczynowi

    wyrzuconych oczek i liczby wypadłej na czworościanie. Podać rozkład zmiennej losowej.

22. Rzucamy trzema monetami na których znajdują się następujące liczby -1 i 1, 0 i 1 oraz 1 i 2. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.

23. Rzucamy kostką i monetą. Opisać zmienną losową, jeśli przyjmuję wartości równe

    - sumie oczek na kostce i wypadłych liczb na monecie (orzeł - 0, reszka - 1);
    - ilości wyrzuconych oczek na kostce;
    - iloczynowi ilości oczek na kostce i wypadłych liczb na monecie (orzeł - 0, reszka - 1).

24. Rzucamy kostką do gry i dwiema monetami. Na jednej z monet znajdują się liczby 1 i 2, a na drugiej 0 i 1. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi otrzymanych oczek i wyrzuconych liczb na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.

25. Rzucamy kostką i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby -1,1; 0,1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.

26. Rzucamy kostką i trzema symetrycznymi monetami, na których znajdują się odpowiednio liczby -1,1; 0,1; -1,0. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie wyrzuconych oczek i iloczynowi liczb wypadłych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.

27. Rzucamy dwoma kostkami i dwoma symetrycznymi monetami, na których znajdują się liczby 0,1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek powiększonych o iloczyn wyników otrzymanych na monetach. Podać rozkład zmiennej losowej.

28. Rzucamy dwoma kostkami do gry i monetą na której są cyfry 0 i 1. Zmienna losowa przyjmuje wartości równe iloczynowi sumy oczek i wyrzuconej liczby na monecie. Podać rozkład zmiennej losowej.

29. Rzucamy dwoma kostkami i symetryczną monetą, na której znajdują się liczby -1,1. Zmienna losowa X przyjmuje wartości równe sumie liczby wypadłej na monecie i wartości bezwzględnej różnicy wyrzuconych oczek. Podać rozkład zmiennej losowej.

30. Ze zbioru N ponumerowanych elementów losujemy ze zwracaniem n elementów $(1 < n < N)$. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi przyjmującymi odpowiednio wartość największego i najmniejszego wylosowanego numeru. Wyznaczyć rozkłady X, Y.

31. Uczeń rzuca 4 razy do kosza. Prawdopodobieństwo umieszczenia piłki w koszu wynosi $\frac{1}{4}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej wyznaczonej przez ilość trafień do kosza.