Lista zadania nr 7

Metody probabilistyczne i statystyka

studia I stopnia – informatyka (rok 2)

Wydziału Ekonomiczno-Informatycznego

Filia UwB w Wilnie

Jarosław Kotowicz

Instytut Matematyki Uniwersytet w Białymstoku

21 marca 2009

Funkcje zmiennych losowych

1. X jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku [0,1]. Znaleźć dystrybuantę i gęstość następujących zmiennych losowych

   - $Y = aX + b$ gdzie $a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$;
   - $Y = 2X^2 - 1$;
   - $Y = -\ln(1 - X)$;
   - $Y = -\ln X$;
   - $Y = X^k, k \in \mathbb{N}$;

2. X ma rozkład wykładniczy ze współczynnikiem $\lambda > 0$. Znaleźć gęstość rozkładu:

   - $Y = X^\alpha, \alpha > 0$
   - $Y = X^3$;
   - $Y = 5X - 1$;
   - $Y = 3X + 2$;

3. X ma rozkład normalny $N(0, 1)$. Jaki rozkład ma zmienna $Y = aX + b$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}, a > 0$?

Zmienne losowe wielowymiarowe

1. Dobrać tak stałą c, aby funkcja
$$f(x,y) = \begin{cases} cxy & \text{dla } 1 \leqslant x \leqslant 2, 2 \leqslant y \leqslant 4 \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów} \end{cases}$$
była gęstością rozkładu dwuwymiarowego. Dla tak obliczonej stałej policzyć dystrybuantę tego rozkładu oraz rozkłady brzegowe.

2. Czy można dobrać stałą c tak, aby funkcja
$$f(x,y) = \begin{cases} cxy + x + y & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów} \end{cases}$$
była gęstością rozkładu dwuwymiarowego. Jeśli tak, to dla tak obliczonej stałej policzyć dystrybuantę tego rozkładu oraz rozkłady brzegowe.

3. Wyznaczyć dystrybuanty oraz rozkłady brzegowe następującego rozkładu dwuwymiarowego
$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 2 - x \\ 0 & \text{dla pozostałych punktów} \end{cases}.$$

4. Zmienna losowa (X, Y) ma rozkład równomierny na kwadracie $\langle 0, 2\rangle^2$. Obliczyć rozkłady brzegowe.

5. Dana jest dwuwymiarowa gęstość
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{9}xy & \text{dla } x, y \in [1,2] \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y) \end{cases}$$
Obliczyć moment rzędu 2

   - (2,0);
   - (1,1).

6. Dobrać stałą a, tak aby funkcja określona wzorem
$$f(x,y) = \begin{cases} a & \text{dla } 0 < y < x^2 < 1 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y) \end{cases}$$
była gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej.

7. Dla zmiennej losowej z zadania 6 obliczyć rozkłady brzegowe.

8. Wyznaczyć stałą c, tak aby funkcja $f(x,y) = c\exp(-\frac{1}{2}(x^2 + 2xy + 5y^2))$ była gęstością. Obliczyć momenty zwykłe rzędu 2, rozkłady brzegowe oraz rozkłady zmiennych $Z_1 = X + Y, Z_2 = X - Y$.

9. Dana jest gęstość prawdopodobieństw układu zmiennych losowych
$$f(x,y) = \begin{cases} kxy\exp(-(x^2+y^2)) & \text{dla } x \geqslant 0, y \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases}.$$
Wyznaczyć k rozkłady brzegowe, warunkowe, pierwsze i drugie momenty.

10. Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa układu trzech zmiennych losowych (X, Y, Z) mając daną dystrybuantę
$$F(x,y,z) = \begin{cases} (1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cy}) & \text{dla } x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases}.$$

11. Znaleźć gęstości prawdopodobieństwa rozkładów brzegowych zmiennych losowych X i Y, mając gęstość prawdopodobieństwa dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y)
$$f(x,y) = \begin{cases} 2\exp(-x-2y) & \text{dla } x, y > 0 \\ 0 & \text{dla pozostałych } (x,y) \end{cases}.$$

12. Znaleźć rozkłady brzegowe zmiennych losowych X, Y mając rozkład zmiennej losowej dwuwymiarowej (X, Y) opisany tabelką :

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	0,05	0,23	0,20	0,12
y_2	0,20	0,08	0,10	0,02

13. Obliczyć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X + Y$, gdzie X, Y są niezależnymi i mają gęstości równe odpowiednio
$$f_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp^{-\frac{x^2}{4}}, f_Y(y) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\exp^{-\frac{y^2}{64}}.$$

14. Obliczyć gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z = X - Y$, gdzie X, Y są niezależnymi i mają gęstości równe odpowiednio
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}}\exp^{-\frac{x^2}{6}}, f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\exp^{-\frac{y^2}{8}}.$$

Uwaga do następnych zadań:

Gęstość prawdopodobieństw układu n zmiennych losowych normalnych (wielowymiarowy układ normalny) ma postać dana jest wzorem
$$f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\Delta}}\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\overline{k_{ij}}(x_i - E(X_i))(x_j - E(X_j))\right],$$
gdzie Δ - macierz korelacji, $\overline{k_{ij}}$ element macierzy odwrotnej do Δ.

Dana jest macierz korelacji układu losowych normalnych (X, Y)
$$\begin{bmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 169 \end{bmatrix}.$$

Podać wzór na dwuwymiarową gęstość prawdopodobieństwa jeśli $E(X) = 26, E(Y) = -12$.

15. Dana jest macierz korelacji układu czterowymiarowej zmiennej losowej (X_1, X_2, X_3, X_4) o rozkładzie normalnym

$$\begin{bmatrix} 15 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 16 & 6 & -2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Podać wzór na czterowymiarową gęstość prawdopodobieństwa jeśli $E(X_1) = 10, E(X_2) = 0, E(X_3) = -10, E(X_4) = 1$.

16. Dana jest macierz korelacji układu zmiennych losowych normalnych (X, Y, Z)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Podać wzór na gęstość prawdopodobieństwa jeśli $E(X) = E(Y) = E(Z) = 0$.

17. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{8}(2x^2 + 4y^2 - 2y(z+5) + (z+5)^2)\right].$$

Zbudować macierz korelacji.

18. Dana jest gęstość prawdopodobieństwa

$$f(x, y) = c \exp\left[-(4(x-5)^2 + 2(x-5)(y-3) + 5(y-3)^2)\right].$$

Wyznaczyć c, a następnie zbudować macierz korelacji.

Nierówności związane z momentami.

1. Niech zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne o jednakowych rozkładach,

$$m := E(X_k), \varrho^2 := D^2(X_k).$$

Stosując klasyczną nierówność Czebyszewa oszacować N dla ustalonego $a > 0$, by

$$P(\{| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k - m |> a\}) \leqslant 0.05.$$

2. Z klasycznej nierówności Czebyszewa ocenić prawdopodobieństwo, że zmienna losowa normalna (tzn. $N(0,1)$) odchyli się od swojej wartości oczekiwanej o więcej niż
   - cztery średnie odchylenia,
   - trzy średnie odchylenia.

3. Rzucamy n razy monetą. Niech X ilość orłów. Korzystając z nierówności Czebyszewa znaleźć takie n aby $P(|\frac{1}{n}\mathrm{X} - \frac{1}{2}| < 1/10) > 9/10$.

4. Strzelamy 300 razy do tarczy z prawdopodobieństwem trafienia w jednym strzale wynoszącym 1/4. Z nierówności Czebyszewa ocenić $P(|X - 75| < 30)$, gdzie X jest ilością trafień.

5. X ma rozkład jednostajny na odcinku $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$
   - Oszacować z nierówności Czebyszewa $P(|X| \geqslant \frac{3}{2})$
   - Obliczyć $P(|X| \geqslant \frac{3}{2})$ bezpośrednio.

6. X ma rozkład normalny $N(0,1)$. Oszacować z góry $P(|X| \geqslant 3)$ przy pomocy:

- nierówności Czebyszewa
- tablic

7. Zmienne losowe $X_i, i \in \mathbb{N}$ są niezależne i mają jednakowe rozkłady $P(\{X_i = k\}) = 0,2, k = 1,2,3,4,5$. Znaleźć prawdopodobieństwo, że zmienna $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$ przyjmie wartość większą od 320.

8. Niech zmienna losowa X przyjmuje wartości dodatnie i istnieje $E(X)$ oraz $E(X) = a$. Udowodnić, że wtedy $P(X \geqslant 2a\}) \leqslant \frac{1}{2}$.
Wsk. Zastować nierówność Markowa.

9. Rzucamy n razy symetryczną monetą. Niech zmienna losowa X_k oznacza wyrzucenie orła za k razem. Korzystając z nierówności, Czebyszewa oszacować n aby

$$P(\{\omega : |\frac{1}{n}\sum_{i+1}^{n} X_i(\omega) - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10}\}) > \frac{9}{10}.$$

Funkcja charakterystyczna.

1. Policzyć funkcje charakterystyczne rozkładów:

   - rozkładu jednostajnego na odcinku $(-1,1)$;
   - rozkładu jednostajnego na $[a,b]$;
   - rozkład trójkątny równoramienny na odcinku $\langle -1, 1\rangle$;
   - rozkładu wykładniczego;
   - rozkładu Bernoulliego;
   - rozkładu Poissona;
   - rozkładu dwupunktowego $(1 > p > 0, P(X=1) = p, P(X=0) = 1-p)$;
   - rozkładu $N(0,1)$;
   - rozkładu $N(m,\sigma)$;
   - rozkładu zadanego wzorem $P(X = k) = (1-p)p^k$ dla $k = 0,1,2,\ldots (0 < p < 1)$;
   - rozkładu zmiennej losowej X, którego gęstość zadana jest wzorem $f(x) = \frac{1}{2}\exp(-|x|)$;
   - zmiennej losowej, która przyjmuje wartości równe ilosci wyrzuconych oczek kostką do gry;

2. Mając daną funkcję charakterystyczną znaleźć rozkład zmiennej losowej:

   - $\phi(t) = \frac{1}{4}(\exp(-it) + \exp(it))^2$
   - $\phi(t) = \cos(t)$
   - $\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kt), a_k > 0, \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$;
   - $\phi_X(t) = (1+t^2)^{-1}$.

Prawa wielkich liczb i centralne twierdzenie graniczne.

1. Niech X_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że

   - $$X_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt[4]{c}} \exp\left[-\frac{(x-c^n)^2}{\sqrt{n}}\right], c \in (0,1), n \in \mathbb{N};$$
   - $P(\{X_n = n\}) = \frac{1}{1+n^2}$ i $P(\{X_n = -\frac{1}{n}\}) = \frac{n^2}{1+n^2}$;
   - $P(\{X_n = \sqrt{n}\}) = P(\{X_n = -\sqrt{n}\} = \frac{1}{n}$ i $P(\{X_n = 0\}) = 1 - \frac{2}{n}$

   Czy ciąg spełnia MPWL?

2. Niech będzie dany ciąg niezależnych zmiennych losowych
   - $\{X_n | n \geqslant 3\}$ i $P(X_n = \pm \ln n) = \frac{1}{2}$;
   - $\{X_n | n \geqslant 1\}$ i $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right), P(X_n = 2^{\pm n}) = \frac{1}{2^{n+1}}$,

   Czy ciąg ten spełnia
   - PWL?
   - MPWL?
3. Niech będzie dany ciąg zmiennych losowych $\{X_n | n \geqslant 2\}$ taki, że $X_n \in N(0, \ln n)$. Czy spełnia on PWL?
4. Niech będzie dany ciąg zmiennych losowych $\{X_n | n \geqslant 1\}$ taki, że $P(X_n = 2^n) = P(X_n = -2^n) = 2^{-(2n+1)}, P(X_n = 0) = 1 - 2^{-2k}$. Czy spełnia on MPWL? Niech X_n zbiega z według prawdopodobieństwa do X podać wzór na zmienną losowej X i pokazać powyższą zbieżność.
5. Niech $\{X_k | k \in \mathbb{N}\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:
   $$P(\{\omega | X_k(\omega) = i\}) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}, i, k \in \mathbb{N}.$$
   Wykazać, że dla zmiennej losowej $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ zachodzi MPWL.
6. Niech $\{X_k | k \in \mathbb{N}\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie:
   - $$P(\{\omega | X_k(\omega) = \frac{(-1)^i}{i}\}) = \frac{1}{2^i}, i, k \in \mathbb{N};$$
   - $$P(\{\omega | X_k(\omega) = i\}) = \frac{e^{-1}}{i!}, k \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

   Wykazać, że dla zmiennych losowych zachodzi MPWL.
7. Partia towaru ma wadliwość 7 % . Pobrano próbkę 800 elementową. Obliczyć prawdopodobieństwo, że ilość sztuk wadliwych w tej próbie jest zawarta w granicach 6 % - 9 %.
8. Strzelamy 300 razy, przy czym prawdopodobieństwo za każdym razem trafienia do celu wynosi 0,25. Określić prawdopodobieństwo, że liczba celnych strzałów będzie się różnic o nie więcej niż 0,1 od
   - ogólnej liczby strzałów.
   - najbardziej prawdopodobnej liczby celnych strzałów.
9. Przeprowadzono 60 jednakowych prób, w których mogło zajść zdarzenie A. Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenie w pojedynczej próbie wynosi $0,6$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że zdarzenie nie pojawi się w większości prób.
10. W 10 000 rzutów monetą orzeł wypadł 5400 razy. Uzasadnij przypuszczenie, że moneta jest niesymetryczna.
11. Korzystając z prawa wielkich liczb Moivre'a - Laplace'a oszacować prawdopodobieństwo, że w 720 rzutach kostką ilość szóstek będzie
    - zawierać się pomiędzy 121 a 140
    - mniejsza niż 125
    - większa niż 110
12. Rzucamy 1000 razy kostką. Niech zmienna losowa S oznacza sumę wyrzuconych oczek. Na podstawie twierdzenia Lindeberga
    - ocenić $P(3450 \leqslant S \leqslant 3550)$,
    - znaleźć takie N, M jak najmniej różniące się od siebie, aby $P(M \leqslant S \leqslant N) > 99/100$.