Metody probabilistyczne i statystyka - wykład trzeci[1]

dr Jarosław Kotowicz

Instytut Informatyki, Uniwersytet w Białymstoku

wersja z roku ak. 2021/22

Spis treści

Rozkład Fishera-Snedecora.

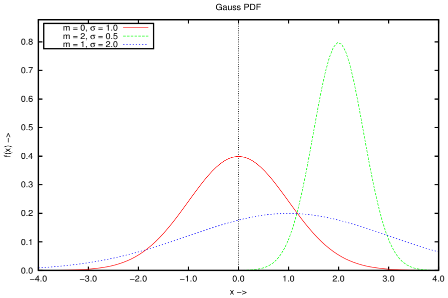
Przykład 1

Niech $n, r \in \mathbb{N}$. *Rozkład o gęstości*

$$f(x) := \frac{\Gamma\left(\frac{n+r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(\frac{r}{n}\right)^{\frac{r}{2}} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{\left(x+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n+r}{2}}} \mathbb{I}_{]0,+\infty[}(x) \tag{1}$$

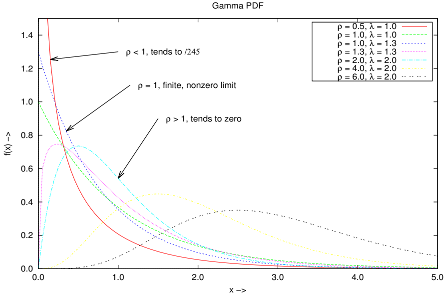
nazywamy rozkładem Fishera-Snedecora z liczbą stopni swobody licznika n *i liczbą stopni swobody mianownika* r *i oznaczamy* $F(n,r)$.

Kilka wykresów gęstości rozkładów ciągłych. I



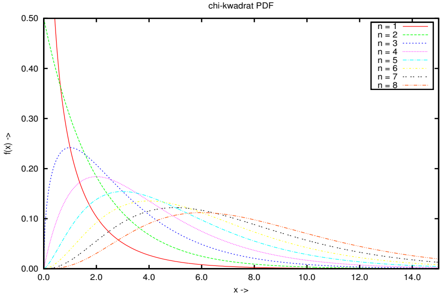
Rysunek: Gęstość rozkładu normalnego.

Kilka wykresów gęstości rozkładów ciągłych. II



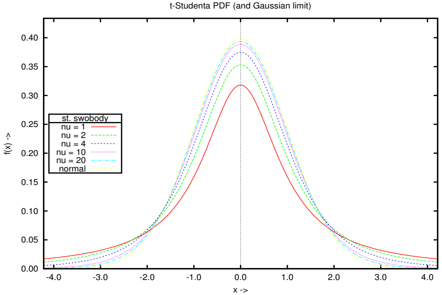
Rysunek: Gęstość rozkładu gamma.

Kilka wykresów gęstości rozkładów ciągłych. III



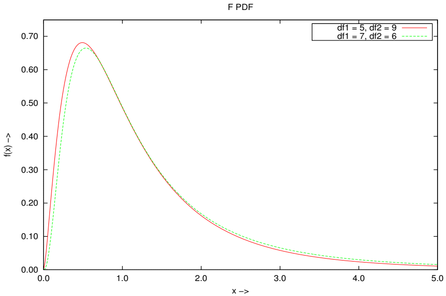
Rysunek: Gęstość rozkładu chi-kwadrat.

Kilka wykresów gęstości rozkładów ciągłych. IV



Rysunek: Gęstość rozkładu t-Studenta.

Kilka wykresów gęstości rozkładów ciągłych. V



Rysunek: Gęstość rozkładu Fishera-Snedecora.

Spis treści

Przekształcenia liniowe zmiennych losowych. I

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną i X będzie jednowymiarową zmienną losową określoną na tej przestrzeni.

Lemat 1

Niech F będzie dystrybuantą zmienną losową X. Niech zmienna losowa $Y = aX + b$, gdzie $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oraz $b \in \mathbb{R}$, ma dystrybuantę G. Wówczas

$$G(r) = \begin{cases} F\left(\frac{r-b}{a}\right) & \text{dla } a > 0 \\ 1 - \left(F\left(\frac{r-b}{a}\right) - P\left(\{\omega : X(\omega) = \frac{r-b}{a}\}\right)\right) & \text{dla } a < 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Przekształcenia liniowe zmiennych losowych. II

Wniosek 1

Jeżeli spełnione są założenia lematu 1 oraz zmienna losowa X ma rozkład ciągły, to wówczas

$$G(r) = \begin{cases} F\left(\frac{r-b}{a}\right) & dla\ a > 0 \\ 1 - F\left(\frac{r-b}{a}\right) & dla\ a < 0 \end{cases}. \tag{3}$$

Wniosek 2

Jeżeli spełnione są założenia lematu 1 oraz f jest gęstością zmiennej losowej X, zaś g gęstością zmiennej losowej Y, to

$$g(r) = \frac{1}{|a|} f\left(\frac{r-b}{a}\right). \tag{4}$$

Dowolne przekształcenie zmiennych losowych. I

Twierdzenie 1

Jeżeli zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości f i $X(\Omega) \subset]a, b[$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty)$, funkcja $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ jest funkcją klasy $C^1(]a, b[)$ oraz $\varphi'(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in]a, b[$, to zmienna losowa $Y = \varphi(X)$ ma rozkład ciągły o gęstości

$$g(y) = f(\varphi^{-1}(y))|(\varphi^{-1}(y))'|\mathbb{I}_{\varphi(]a,b[)}(y). \tag{5}$$

Dowolne przekształcenie zmiennych losowych. II

Twierdzenie 2

Niech zmienna losowa X *ma rozkład ciągły o gęstości* f*. Niech* $X(\Omega) \subset I = \bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k]$*, gdzie dla dowolnych* $1 \leqslant k < l \leqslant n$ *zachodzi* $]a_k, b_k[\cap]a_l, b_l[= \emptyset$*. Niech funkcja* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją klasy* $C^1(]a_k, b_k[)$ *oraz* $\varphi'(x) \neq 0$ *dla dowolnego* $x \in]a_k, b_k[$ *i dowolnego* $1 \leqslant k \leqslant n$*, to zmienna losowa* $Y = \varphi(X)$ *ma rozkład ciągły o gęstości*

$$g(y) = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi^{-1}(y)) |(\varphi^{-1}(y))'| \mathbb{I}_{\varphi(]a_k, b_k[)}(y). \tag{6}$$

Dowolne przekształcenie zmiennych losowych. III

Przykład 2

Niech $f := \frac{1}{2}\mathbb{I}_{[-1,1]}$, *Funkcja ta jest gęstością. Niech* $\varphi(r) = r^2$. *Oznaczmy przez* g *gęstość zmiennej losowej* $Y = \varphi(X)$. *Wtedy*

$$g(y) = (f(-\sqrt{y}) + f(\sqrt{y})) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\mathbb{I}_{[0,1]}(y).$$

Spis treści

Własności pochodnej dystrybuanty i jej związek z gęstością. I

Lemat 2

Niech $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą i prawostronnie ciągłą. Jeżeli F' istnieje prawie wszędzie, to dla dowolnych a i b zachodzi oszacowanie

$$\int_a^b F'(s)ds \leqslant F(b) - F(a). \tag{7}$$

Własności pochodnej dystrybuanty i jej związek z gęstością. II

Wniosek 3

Jeżeli funkcja $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *spełnia założenia lematu* 2, *a ponadto*

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = 1 \wedge \lim_{t\to-\infty} F(t) = 0,$$

to

$$\int_{-\infty}^{t} F'(s)ds \leqslant F(t) \wedge \int_{t}^{\infty} F'(s)ds \leqslant 1 - F(t). \tag{8}$$

Twierdzenie 3

Jeżeli funkcja $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest dystrybuantą,* F' *istnieje prawie wszędzie oraz* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F'(s)ds = 1$, *to* F' *jest gęstością rozkładu o dystrybuancie* F.

Spis treści

Całkowalność zmiennych losowych. I

Niech (Ω, Σ, P) będzie przestrzenią probabilistyczną.

Niech $r \in \mathbb{R}_+$. Wprowadzimy następujące oznaczenia

$$\int\limits_{\Omega} |X|^r dP < +\infty \Leftrightarrow X \in L^r(\Omega, \Sigma, P) \equiv L^r(\Omega). \tag{9}$$

Całkę występującą we wzorze (9) będziemy rozumieli w sposób następujący

$$\int\limits_{\Omega} |X|^r dP = \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}} |x|^r f(x) dx & X \text{ rozkład ciągły } f \\ \sum\limits_{x \in W_X} |x|^r P(\{\omega : X(\omega) = x\}) & X \text{ rozkład dyskretny } W_X, \end{cases} . \tag{10}$$

Wartość oczekiwana. I

Definicja 1

Niech dla jednowymiarowej zmiennej losowej X zachodzi $X \in L^1(\Omega, \Sigma, P)$. Wówczas wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy liczbę

$$\mathbb{E}(X) := \int_\Omega X dP. \tag{11}$$

Wartość oczekiwana. II

Twierdzenie 4 (Własności wartości oczekiwanej I)

Niech X i Y będą jednowymiarowymi zmiennymi losowymi. Załóżmy, że zmienne losowe X i Y są całkowalne. Wtedy

1. *jeżeli $X \geqslant 0$, to $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$;*
2. $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$;
3. *Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ istnieje wartość oczekiwana zmiennej losowej $aX + bY$ i wyraża się ona wzorem*
$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) \tag{12}$$
4. *(**Lemat Fatou**) Dla dowolnego ciągu nieujemnych zmiennych losowych $(X_n)_{n \geqslant 1}$*
$$\mathbb{E}(\liminf_{n\to\infty} X_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) \tag{13}$$

Wartość oczekiwana. III

Twierdzenie 5 (Własności wartości oczekiwanej II)

1. *(**Twierdzenie Lebesgue'a - Beppo Leviego**) Dla dowolnego niemalejącego ciągu nieujemnych zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$ zachodzi*

$$\mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} X_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) \tag{14}$$

2. *(**Twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej**) Jeżeli dla ciągu zmiennych losowych $(X_n)_{n\geqslant 1}$ istnieje całkowalna zmienna losowa Z taka, że*

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} |X_n| \leqslant Z,$$

to spełniona jest równość (14).

Wartość oczekiwana. IV

Wniosek 4

Jeżeli zmienne losowe X_i $(i \in \overline{1,n})$ są całkowalne, to

$$\mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n). \tag{15}$$

Wniosek 5

Jeśli zmienna losowa X ma rozkład dyskretny o zbiorze wartości W_X, to wartość oczekiwana zmiennej losowej $\varphi(X)$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum\limits_{x \in W_X} |\varphi(x)| P(\{\omega : X(\omega) = x\})$ jest zbieżny. Ponadto wartość oczekiwana wyraża się wzorem

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in W_X} \varphi(x) P(\{\omega : X(\omega) = x\}). \tag{16}$$

Wartość oczekiwana. V

Przykład 3

Zmienna losowa o gęstości[a]

$$f(r) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+r^2}. \tag{17}$$

nie posiada wartości oczekiwanej.

[a] Jest to rozkład Cauchy'ego $Cauchy(0,1)$

Wariancja i momenty. I

Przed podaniem uogólnienia wartości oczekiwanej sformułujmy następujący lemat

Lemat 3

Niech $\mathbb{R} \ni r \geqslant 1$ *oraz* $q \in [1, r]$. *Wtedy jeżeli jest skończona całka* $\int_\Omega |X|^r dP$, *to jest skończona całka* $\int_\Omega |X|^q dP$.

Uwaga 1

Pojęcie wartości oczekiwanej można uogólnić zastępując warunek całkowalności innym.

Wariancja i momenty. II

Definicja 2

Niech $\mathbb{R} \ni r \geqslant 1$, zaś a liczbą rzeczywistą, X jednowymiarową zmienną losową. Niech zmienna losowa X będzie całkowalna z r-tą potęgą.[a]
Momentem zwykłym rzędu r względem liczby a zmiennej losowej X nazywamy liczbę równą

$$\mathbb{E}((X-a)^r) := \int_\Omega (X-a)^r \, dP, \tag{18}$$

o ile wyrażenie występujące pod całką jest określone.[b]

[a] Nie trzeba zakładać, że całkowalna z r-tą potęgą jest zmienna $X - a$ na podstawie lematu 3 i z faktu, że funkcja stała jest całkowalna względem miary probabilistycznej.

[b] Jest ono zawsze określone, gdy $r \in \mathbb{N}$.

Wariancja i momenty. III

Definicja 3

Niech zmienna losowa X będzie całkowalna z r-tą potęgą. Momentem absolutnym rzędu r względem liczby a zmiennej losowej X nazywamy liczbę równą

$$\mathbb{E}(|X-a|^r) := \int_\Omega |X-a|^r dP. \tag{19}$$

Uwaga 2

Jeżeli $a = 0$, to są to momenty zwykłe lub absolutne rzędu r.
Jeżeli $a = \mathbb{E}(X)$ otrzymujemy momenty centralne zwykłe i absolutne rzędu r.

Wariancja i momenty. IV

Uwaga 3

Momenty zwykłe rzędu r przyjęło się oznaczać m_r, zaś zwykłe momenty centralne rzędu r oznacza się symbolem μ_r.
Mamy $\mathbb{E}(X) = m_1$, oczywiście o ile zmienna losowa X jest całkowalna.

Definicja 4

Niech $X \in L^2(\Omega)$. Liczbę $\mathbb{D}^2(X)$ równą

$$\mathbb{D}^2(X) := \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \tag{20}$$

nazywamy wariancją zmiennej losowej X.

Wariancja i momenty. V

Uwaga 4

Zauważmy, że $\mathbb{D}^2(X) = \mu_2$.

Uwaga 5

Wariancja zmiennej losowe X *oznaczana jest w literaturze również symbolem* $Var(X)$.

Wniosek 6

Niech $X \in L^2(\Omega)$. *Wtedy* $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Wariancja i momenty. VI

Twierdzenie 6

Niech $X \in L^2(\Omega)$*. Wówczas*

$$\mathbb{D}^2(X) \geqslant 0 \tag{21}$$

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} \quad \mathbb{D}^2(aX) = a^2\mathbb{D}^2(X), \tag{22}$$

$$\forall_{a\in\mathbb{R}} \quad \mathbb{D}^2(X+a) = \mathbb{D}^2(X), \tag{23}$$

$$\mathbb{D}^2(X) = 0 \Leftrightarrow \exists_{a\in\mathbb{R}} P\left(\{\omega : X(\omega) = a\}\right) = 1. \tag{24}$$

Wniosek 7

Niech $X \in L^2(\Omega)$*. Wtedy*

$$|\mathbb{E}(X)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}. \tag{25}$$

Wariancja i momenty. VII

Wniosek 8

Niech $X \in L^2(\Omega)$. *Wtedy*

$$\mathbb{D}^2(X) = \inf_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{E}((X-a)^2). \tag{26}$$

Definicja 5

Niech $X \in L^2(\Omega)$. *Odchyleniem standardowym zmiennej losowej* X *nazywamy liczbę równą*

$$\sigma(X) \equiv \mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)}. \tag{27}$$

Inne parametry liczbowe. I

Definicja 6

Niech $X \in L^1(\Omega)$*. Odchyleniem przeciętnym zmiennej losowej* X *nazywamy liczbę równą*

$$d(X) := \int_\Omega |X - \mathbb{E}(X)| dP. \tag{28}$$

Definicja 7

Niech $X \in L^2(\Omega)$ *oraz* $\mathbb{E}(X) \neq 0$*. Współczynnikiem zmienności zmiennej losowej* X *nazywamy liczbę równą*

$$\nu_\sigma := \frac{\mathbb{D}(X)}{\mathbb{E}(X)}. \tag{29}$$

Inne parametry liczbowe. II

Definicja 8

Niech $X \in L^1(\Omega)$ *oraz* $0 \neq \mathbb{E}(X)$. *Wskaźnikiem nierównomierności zmiennej losowej* X *nazywamy liczbę równą*

$$H(X) := \frac{d(X)}{\mathbb{E}(X)}. \tag{30}$$

Uwaga 6

Współczynnik zmienności zmiennej losowej oraz wskaźnik nierównomierności zmiennej losowej w statystyce nazywane są współczynnikami zmienności Pearsona.

Inne parametry liczbowe. III

Definicja 9

Niech $X \in L^2(\Omega)$ *w pierwszym przypadku oraz* $X \in L^1(\Omega)$ *w drugim.*
Typowym obszarem zmienności zmiennej losowej X *jest przedział określony warunkiem*

- $T_\sigma :=]\mathbb{E}(X) - \mathbb{D}(X), \mathbb{E}(X) + \mathbb{D}(X)[$,
- $T_d :=]\mathbb{E}(X) - d(X), \mathbb{E}(X) + d(X)[$.

Definicja 10

Niech $X \in L^3(\Omega)$ *oraz* $\mathbb{D}^2(X) \neq 0$. *Współczynnikiem asymetrii (skośności) zmiennej losowej* X *nazywamy liczbę równą*

$$\gamma(X) := \frac{\mu_3}{(\mathbb{D}(X))^3}. \tag{31}$$

Inne parametry liczbowe. IV

Definicja 11

Niech $X \in L^4(\Omega)$ *oraz* $\mathbb{D}^2(X) \neq 0$. *Współczynnikiem koncentracji (kurtozą) nazywamy liczbę*

$$\gamma_4 := \frac{\mu_4}{(\mathbb{D}^2(X))^2}.$$

Parametry pozycyjne. I

Definicja 12

Niech $p \in]0,1[$. *Kwantylem rzędu* p *nazywamy liczbę* x_p *taką, że*

$$P\left(\{\omega : X(\omega) \leqslant x_p\}\right) \geqslant p \wedge P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant x_p\}\right) \geqslant 1 - p. \tag{32}$$

Definicja 13

Medianą nazywamy kwantyl rzędu $\frac{1}{2}$ *i oznaczamy ją* Me.

Definicja 14

Kwartylem nazywamy dowolny kwantyl rzędu będącego wielokrotnością liczby $\frac{1}{4}$.

Parametry pozycyjne. II

Uwaga 7

Kwartyl pierwszy (oznaczenie Q_1) to kwantyl rzędu $\frac{1}{4}$, kwartyl drugi to kwantyl rzędu $\frac{2}{4}$ (jest to mediana), a kwartyl trzeci to kwantyl rzędu $\frac{3}{4}$ (oznaczenie Q_3).

Definicja 15

Modą (dominantą) nazywamy w przypadku rozkładu dyskretnego wartość zmiennej losowej o największym prawdopodobieństwie, zaś w przypadku rozkładu ciągłego każde maksimum lokalne gęstości.
Oznaczamy ją Mo.

Parametry pozycyjne. III

Definicja 16

Odchyleniem ćwiartkowym[a] *nazywamy liczbę*

$$Q := \frac{Q_3 - Q_1}{2}. \tag{33}$$

[a] Jest to parametr liczbowy

Definicja 17

Pozycyjnym typowym obszarem zmienności nazywamy następujący przedział

$$T_Q :=]\,\mathrm{Me} - Q, \mathrm{Me} + Q[.$$

Parametry pozycyjne. IV

Definicja 18

Pozycyjnymi współczynnikami zmienności nazywamy liczby równe odpowiednio

$$V_Q := \frac{Q}{\mathrm{Me}}, \ (\mathrm{Me} \neq 0) \quad \textit{oraz} \quad V_{Q_1,Q_3} := \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}.$$

Parametry pozycyjne. V

Definicja 19

Pozycyjnym wskaźnikiem asymetrii nazywamy liczbę

$$W_s^Q := (Q_3 - \mathrm{Me}) - (\mathrm{Me} - Q_1).$$

Pozycyjnym współczynnikiem asymetrii nazywamy liczbę

$$A_Q := \frac{(Q_3 - \mathrm{Me}) - (\mathrm{Me} - Q_1)}{2Q}.$$

Definicja 20

Niech $X \in L^1(\Omega)$. Wskaźnikiem asymetrii nazywamy liczbę

$$W_s := \mathbb{E}(X) - \mathrm{Mo}\,.$$

Parametry pozycyjne. VI

Definicja 21

Niech $X \in L^2(\Omega)$ *i* $\mathbb{D}^2(X) \neq 0$ *(odpowiednio* $X \in L^1(\Omega)$ *i* $d(X) \neq 0$*). Pierwszym współczynnikiem asymetrii Pearsona nazywamy liczbę*

$$A_s := \frac{\mathbb{E}(X) - \mathrm{Mo}}{\mathbb{D}(X)} \quad \textit{oraz} \quad A_d := \frac{\mathbb{E}(X) - \mathrm{Mo}}{d(X)}.$$

Drugi współczynnikiem asymetrii Pearsona nazywamy liczbę

$$W_{s,2} := \frac{\mathbb{E}(X) - \mathrm{Me}}{\mathbb{D}(X)} \quad \textit{oraz} \quad W_{d,2} := \frac{\mathbb{E}(X) - \mathrm{Me}}{d(X)}.$$

Parametry pozycyjne. VII

Uwaga 8

Wskaźnik asymetrii oraz pierwszy i drugi współczynniki asymetrii Pearsona w dalszej części wykładu dotyczącej statystyki matematycznej będziemy zaliczać do miar mieszanych.

Definicja 22

Pozycyjnym współczynnikiem koncentracji nazywamy liczbę

$$W_s := \frac{D_9 - D_1}{Q_3 - Q_1},$$

gdzie D_i jest i-tym decylem oraz $D_1 = x_{\frac{1}{10}}$, $D_9 = x_{\frac{9}{10}}$.

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennych dyskretnych. I

Przykład 4

Niech $X \sim \delta(x_0)$. *Wtedy* $\mathbb{E}(X) = x_0$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = 0$.

Przykład 5

Niech $p \in]0, 1[$. *Niech zmienna losowa* X *ma rozkład dwupunktowy skupiony w punktach* x_1 *i* x_2 *tak, że* $P(\{x_1\}) = p$ *i* $P(\{x_2\}) = 1 - p$. *Wtedy* $\mathbb{E}(X) = px_1 + (1 - p)x_2$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = p(1 - p)(x_1 - x_2)^2$.
Natomiast, gdy $X \sim Bin(1, p)$, *to* $\mathbb{E}(X) = p$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = p(1 - p)$.

Przykład 6

Niech $\lambda \in \mathbb{R}_+$. *Jeżeli* $X \sim Po(\lambda)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \lambda$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = \lambda$.

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennych dyskretnych. II

Przykład 7

Niech $p \in]0,1[$. *Jeżeli* $X \sim Geom(p)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Przykład 8

Niech $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *Jeżeli* $X \sim Bin(n,p)$, *to* $\mathbb{E}(X) = np$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = np(1-p)$.
2. *Jeżeli* $X \sim NegBin(n,p)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \frac{n(1-p)}{p}$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = \frac{n(1-p)}{p^2}$.

Przykład 9

Jeżeli zmienna losowa X *ma rozkład hipergeometryczny z parametrami* a, b, n, *gdzie* $a + b > n$ *oraz* $a \geqslant n$ *i* $b \geqslant n$, *to* $\mathbb{E}(X) = \frac{an}{a+b}$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = \frac{abn(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}$.

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennych ciągłych. I

Przykład 10

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ *oraz* $a < b$. *Jeżeli* $X \sim \mathcal{U}(]a, b[)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Przykład 11

Niech $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

1. *Jeżeli* $X \sim Exp(\lambda)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.
2. *Jeżeli* $X \sim L(\lambda)$, *to* $\mathbb{E}(X) = 0$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = \frac{2}{\lambda^2}$.

Przykład 12

Niech $a \in \mathbb{R}$ *oraz* $b \in \mathbb{R}_+$. *Jeżeli* $X \sim Cauchy(a, b)$, *to* X *nie posiada wartości oczekiwanej, a więc i wariancji.*

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennych ciągłych. II

Przykład 13

Niech $m \in \mathbb{R}$ *oraz* $\sigma \in \mathbb{R}_+$. *Jeżeli* $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, *to* $\mathbb{E}(X) = m$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = \sigma^2$.

Przykład 14

Niech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$. *Jeżeli* $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.
Niech $\kappa, \theta \in \mathbb{R}_+$. *Jeżeli* $X \sim \Gamma(\kappa, \theta)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \kappa\theta$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = \kappa\theta^2$.

Przykład 15

Niech $p, q \in \mathbb{R}_+$. *Jeżeli* $X \sim Beta(p, q)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \frac{p}{p+q}$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}$.

Wartość oczekiwana i wariancja zmiennych ciągłych. III

Przykład 16

Niech $n \in \mathbb{N}$.

1. *Jeżeli* $X \sim \chi^2(n)$, *to* $\mathbb{E}(X) = n$ *i* $\mathbb{D}^2(X) = 2n$.
2. *Jeżeli* $X \sim t(n)$, *to dla* $n > 1$ *istnieje wartość oczekiwana* X *i* $\mathbb{E}(X) = 0$. *Jeżeli natomiast* $n > 2$, *to istnieje wariancja i* $\mathbb{D}^2(X) = \frac{n}{n-2}$.

Przykład 17

Niech $n, r \in \mathbb{N}$. *Jeżeli* $X \sim F(n, r)$, *to* $\mathbb{E}(X) = \frac{r}{r-2}$, *o ile* $r > 2$ *oraz* $\mathbb{D}^2(X) = \frac{2r^2(n+r-2)}{n(r-2)^2(r-4)}$ *o ile* $r > 4$.

Spis treści

Twierdzenie 7 (Nierówność Schwarza)

Niech $X, Y \in L^2(\Omega)$*. Wówczas zmienna losowa* $XY \in L^1(\Omega)$ *oraz*

$$\mathbb{E}(|XY|) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}. \tag{34}$$

Wniosek 9

Niech $X, Y \in L^2(\Omega)$*. Wówczas*

$$|\mathbb{E}(XY)| \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)}. \tag{35}$$

Definicja 23

Funkcję $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *nazywamy funkcją wypukłą wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \forall_{\alpha\in[0,1]}\ \varphi(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y). \tag{36}$$

Twierdzenie 8 (Nierówność Jensena)

Niech $X \in L^1(\Omega)$. Wówczas dla dowolnej funkcji wypukłej $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że $\varphi(X) \in L^1(\Omega)$ zachodzi

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(X)). \tag{37}$$

Twierdzenie 9 (Nierówność Höldera)

Niech $\mathbb{R} \ni p > 1$ oraz $\mathbb{R} \ni q > 1$ oraz $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Niech $X \in L^p(\Omega)$ oraz $Y \in L^q(\Omega)$. Wówczas zmienna losowa $XY \in L^1(\Omega)$ oraz

$$\mathbb{E}(|XY|) \leqslant (\mathbb{E}(|X|^p))^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}(|Y|^q))^{\frac{1}{q}}. \tag{38}$$

Twierdzenie 10 (Nierówność Czebyszewa)

Niech zmienna losowa X będzie nieujemna.[a] *Wówczas*

$$\forall_{\varepsilon>0} P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{\varepsilon}. \tag{39}$$

[a] Obejmuje też przypadek "*trywialny*", gdy jest nieskończona wartość oczekiwana

Twierdzenie 11 (Uogólniona nierówność Czebyszewa)

Niech $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *będzie dodatnią funkcją borelowską. Jeżeli* $\varphi(X) \in L^1(\Omega)$ *to wówczas:*

1. *Jeżeli* φ *jest niemalejąca, to*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\varphi(X))}{\varphi(\varepsilon)}. \tag{40}$$

2. *Jeżeli* φ *jest parzysta i niemalejąca na* $[0, +\infty[$, *to*

$$\forall_{\varepsilon>0}\ P\left(\{\omega : |X(\omega)| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\varphi(X))}{\varphi(\varepsilon)}. \tag{41}$$

Uwaga 9

Można osłabić założenia o funkcji φ w twierdzeniu 11(ii) następująco
Jeżeli $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją nieujemną, parzystą, $\varphi \not\equiv 0$ oraz niemalejącą na $]0, +\infty[$, to

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \varphi(\varepsilon) > 0 \Rightarrow P\left(\{\omega : |X(\omega)| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(\varphi(X))}{\varphi(\varepsilon)}. \tag{42}$$

Wniosek 10 (Nierówność Markowa)

Niech $\mathbb{R} \ni p > 0$. Wówczas o ile $X \in L^p(\Omega)$, to

$$\forall_{\varepsilon>0};\ P\left(\{\omega : |X(\omega)| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{\varepsilon^p}. \tag{43}$$

Wniosek 11 (Nierówność Czebyszewa-Bienaymé)

O ile $X \in L^2(\Omega)$, to

$$\forall_{\varepsilon>0}\ P\left(\{\omega : |X(\omega) - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{D}^2(X)}{\varepsilon^2}. \tag{44}$$

Wniosek 12 (Nierówność wykładnicza Czebyszewa)

O ile dla pewnego $p > 0$ jest $e^{pX} \in L^1(\Omega)$, to

$$\forall_{\lambda\in[0,p]}\forall_{\varepsilon>0} P\left(\{\omega : X(\omega) \geqslant \varepsilon\}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{\lambda X})}{e^{\lambda\varepsilon}}. \tag{45}$$